協力ゲーム論における衡平配分ルールの新しい公理化について

大石　尊之※

要　旨

協力ゲーム論で最近注目されている衡平的配分ルールの１つである，ENSC(Egalitarian Non-Separable Contribution value) 配分ルールの新しい公理化を示す．そのために，すべての提携形ゲームの集合を定義域とする関数として定義される配分ルールの公理として，「限界貢献度に関する提携単調性公理」と「可変的人口のもとでのランキング保存公理」を新たに導入する．論文では，ENSC配分ルールの完全な特徴付けを２つ証明した．すなわち，ENSC配分ルールは効率性公理，戦略的同等性公理，対称性公理および可変的人口のもとでのランキング保存公理を満たすただひとつの配分ルールである（定理１）．また，ENSC配分ルールは効率性公理，戦略的同等性公理，弱対称性公理および限界貢献度に関する提携単調性公理を満たすただひとつの配分ルールである(定理２).

1　はじめに

協力ゲーム論は，ナッシュ均衡に代表される非協力ゲーム論とともに，社会・経済の問題を分析するうえで重要な役割を担ってきた理論である．非協力ゲーム論とは，プレイヤーと呼ばれる行動主体が複数いるなかで，彼らの相互連関的な意思決定の状況(非協力ゲーム論では「戦略的状況」という) を前提にして，プレイヤーたちの戦略的行動を数学的に分析する理論である．一方，協力ゲーム理論は人々の社会・経済的行動のなかでみられる提携行動を前提にした理論で，提携行動にもとづく利得分配のルール（以下，配分ルールという）を主たる分析対象としている．ゲーム論の創始者であるフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの記念碑的著作「ゲームの理論と経済的行動」(von Neumann and Morgenstern, 1944)の大部分は，この協力ゲーム論の構築に充てられている．これは，フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンが人々の社会的な行動の基礎として，提携行動を想定していたからである．実際,人々の提携行動は，例えば職業組合，政党，同盟，国際貿易上の協定や公共事業入札の談合など，社会のさまざまな場面で観察することができる．

協力ゲーム論の研究において，配分ルールの公理的特徴付け（以下，「配分ルールの公理的研究」と呼ぶ）は伝統的な研究テーマの1　つである.[1)]配分ルールの公理的研究は，市場制度を含むさまざまな経済制度の分配機能の分析にも関連することから，市場の経済理論やメカニズム・デザインの理論といった理論経済学の基幹分野とも深い関係にある．

配分ルールの公理的研究とは，簡単にいうと，ある配分ルールの背後にはどのような基本的性質（以下，「公理」と呼ぶ）があるのか，それらの公理を満たす配分ルールは当該の配分ルール以外にないのかということを，数学的に証明することによって，配分ルール間の差異や公理間の両立可能性（あるいは両立不可能性）などを調べる研究である．

最近，経済学やゲーム論の主要学術専門誌に，衡平的配分ルールの１つである，通称「CIS配分ルール」と呼ばれる配分ルールの公理的研究が注目を集めるようになってきた(例えば,van den Brink (2007), van den Brink and Funaki (2009), Chun and Park (2012)). CIS 配分ルールとは，CIS 値(Center-of gravity of Imputation Set value) を与える配分ルールのことである.[2)] CIS値とは，以下の２つのステップで決まる配分のことである．まず，各プレイヤーが独力で獲得できる値をプレ

※　青森公立大学講師

イヤーごとに分配する．次にプレイヤーたち全員で獲得できる値から各プレイヤーが独力で獲得できる値の合計を引いたものを，均等に各プレイヤ―に分配する．各プレイヤーごとに上記の２つのステップで得る値を合計したものが，CIS値と呼ばれる配分となる．CIS値という呼び方は，このような配分が数学的には，配分集合の重心を示す１点解になるという性質に由来している（Driessen and Funaki, 1997）.もし各プレイヤーの独力で獲得できる値がゼロならば，このCIS配分ルールはプレイヤーたち全員で獲得できる値を均等分割する配分ルールになる．従って，CIS配分ルールは，私たちの日常生活でも馴染みのある均等配分ルールを含むような配分ルールのことであるともいえる．

一方，CIS配分ルールと同様，衡平配分ルールとして知られている通称「ENSC配分ルール」と呼ばれる配分ルールがある．ENSC 配分ルールとは，ENSC 値(Egalitarian Non-Separable Contribution value)を与える配分ルールのことである.[3] ENSC 配分ルールは，プレイヤーの限界貢献度を通じて定義される．任意のプレイヤー i の（全体提携に対する）限界貢献度は，プレイヤー全員で獲得できる値からプレイヤー i を除くプレイヤー全員で獲得できる値の差で定義する．ENSC値とは，次の２つのステップで決まる配分のことである．まず，各プレイヤーの限界貢献度をプレイヤーごとに分配する．次にプレイヤー全員で獲得できる値から各プレイヤーの限界貢献度の合計を引いたものを，均等に各プレイヤ―に分配する．各プレイヤーごとに上記の２つのステップで得る値を合計したものが，ENSC値と呼ばれる配分となる．

興味深いことに，ENSC配分ルールは経済学や社会工学の費用分担問題の分析に応用されてきた．当事者たちの間でどのように費用を負担し合うかという費用分担問題を考えた場合，ENSC配分ルールは，非分離費用と呼ばれる費用を当事者間で均等に負担し合う方法として解釈される．ここでいう非分離費用とは，各当事者が必ず負担すべき最小負担額を総費用から除いた金額のことである．ENSC配分ルールに関する応用研究の好例の１つは，Suzuki and Nakayama (1976) である．彼らは，神奈川県の水資源共同開発における費用分担問に注目し,当時の費用データを通じて，ENSC 配分ルールとジョン・ロールズの差別原理(Rawls, 1971)の考え方を反映するある配分ルールが一致する数学的条件は，現実に満たされうることを発見した.[4] このような現実の費用分担問題に関する配分ルールの検討を行うのに，ENSC配分ルールの基本的な性質を明らかにすることは有益である．

本研究ではENSC配分ルールの新しい公理化を行う．特定化された経済モデルにおけるENSC配分ルールの公理を考えるのでなく，すべての経済モデルに適用可能なENSC配分ルールの公理を検討する.[5] 従って，本論文で議論される数学的内容は抽象性が高くなるが,より一般的な公理が得られることになる．具体的な研究の接近方法として，多くの配分ルールで満たされるような効率性公理，対称性公理，および戦略的同等性公理を可能な限り維持しながら，さらにこれらの諸公理に文献では知られていない，いくつかの公理を新たに追加する形で，ENSC配分ルールの公理化を検討する．このような研究の接近方法を通じて，他の配分ルールの公理系，例えばCIS配分ルールの公理系との比較も容易になる．

本研究の結果を述べる前に，主要な公理について簡潔に説明する．効率性公理は，各プレイヤーの配分の総和がプレイヤー全員で獲得する利得の総和に等しいことを配分ルールに要請する．任意の提携に対する限界貢献度が等しいプレイヤー同士を，対称的プレイヤーという.対称的プレイヤー同士の配分は互いに等しくなくてならないことを配分ルールに要請しているのが，対称性公理である．また，すべてのプレイヤーが対称的である場合の対称性公理を,弱対称性公理という．戦略的同等性公理は，あるプレイヤー i を含む任意の提携が獲得する利得が変化するとき，プレイヤー i 以外のプレイヤーへの配分の帰結は変化しないことを配分ルールに要請する．これらの公理は，配分ルールの標準的な公理として文献では知られている(例えば,Peleg and Sudholter（2003）).実際，CIS配分ルールや経済学でよく応用されるシャープレイ配分ルールは，これらの公理をすべて満たしている．さらに，文献では知られていな

い２つの公理を本研究では導入している．一つは「限界貢献度に関する提携単調性公理」で，もう一つは「可変的人口のもとでのランキング保存公理」である．任意の提携 S の（全体提携に対する）限界貢献度は，プレイヤー全員で獲得できる値から提携 S を除くプレイヤー全員で獲得できる値の差で定義する．あるプレイヤー i が参加する任意の提携の限界貢献度が増加するならば，プレイヤー i の配分は増加しなくてならないことを配分ルールに要請するのが，限界貢献度に関する提携単調性公理である．一方，ランキング保存公理は簡潔にいうと，プレイヤーの人数が変化するとき，変化前のプレイヤーの集合に含まれる任意のプレイヤー i,j の配分の帰結のランキングは変化後も保存されるという関係を，配分ルールに要請する公理である．

本論文の主要な結果は，次の２つの定理に集約される．第一に，ENSC配分ルールは効率性公理，戦略的同等性公理，対称性公理および可変的人口のもとでのランキング保存公理を満たすただひとつの配分ルールである（定理１）．さらにENSC配分ルールは効率性公理，戦略的同等性公理，弱対称性公理および限界貢献度に関する提携単調性公理を満たすただひとつの配分ルールである(定理２)．これらの諸定理は，先行研究におけるCIS配分ルールの公理化の結果との比較を通じて興味深い含意を引き出すことができる．具体的には以下の通りである: 定理１の可変的人口のもとでのランキング保存公理を，Chun and Park (2012) のフェア・ランキング公理に置き換えるだけで，ENSC配分ルールがCIS配分ルールになる．一方，定理２の限界貢献度に関する提携単調性公理を，van den Brink (2007) の提携単調性公理に置き換えるだけで，ENSC配分ルールがCIS配分ルールになる．このように本論文の結果は，CIS配分ルールとENSC配分ルールの公理系の相違を明らかにしている．

論文の構成は以下の通りである．第２節で，協力ゲーム論の標準的な分析道具である提携形ゲームと，すべての提携形ゲームの集合を定義域とする関数としての配分ルールを定義する．そのうえで，本論文の分析対象であるENSC配分ルールを定義する．第３節では，配分ルールの様々な公理を定義する．第４節でENSC配分ルールの２つの公理化を示す．第５節でENSC配分ルールの公理系とCIS配分ルールの公理系の比較を論じる．最後に第６節で，筆者の最近の一連の研究（Oishi and Nayakama (2010), Oishi (2011), Oishi et al. (2013)) で提唱された「公理化の反双対理論」との関連に言及する．

2　数学的準備

2．1　提携形ゲームと配分ルール

von Neumann and Morgenstern(1944) 以来，協力ゲーム論は提携形ゲームと呼ばれる数学的形式を用いてきた．提携形ゲームは，分析対象としている社会や経済の状況のなかでプレイヤーたちが提携行動をとることで，一体どのくらい総利得を獲得することができるかを数学的に表現したものである．

自然数の集合$\mathbb{N}$の部分集合のクラスを$\mathcal{N}$と書く．任意の $N \in \mathcal{N}$ でプレイヤーの集合を表し，$N = \{1, 2, \cdots, n\}$ とする．N についての提携形ゲーム(以下，単にゲームと呼ぶ)を関数$v : 2^N \to \mathbb{R}$で表す．[6] 任意の提携 $S \in 2^N$ に対して，$v(S)$は提携 S のメンバ―が協力した場合に，$N \backslash S$ のメンバーの協力なしに獲得できる総利得を表現すると解釈する．

Nについての提携形ゲーム v のクラスを $\mathcal{V}^N$ で表す.すべての提携形ゲームの集合を $\mathcal{V} = \cup_{N \in \mathcal{N}} \mathcal{V}^N$で表す．配分ルール$\varphi$は$\mathcal{V}$ 上の関数であり，任意の $N \in \mathcal{N}$ と $v \in \mathcal{V}^N$ に対して，ベクトル$\varphi(v) \in \mathbb{R}^n$ を対応させる関数として定義する．

配分ルールは任意のゲームに対して，すべてのプレイヤーにどのように利得を分配すればよいのかを対応付けている．協力ゲーム論では，コア配分ルール，シャープレイ配分ルールや次節で紹介するENSC配分ルールなど様々な配分ルールが提唱され，経済学に応用されている．

2．2　ENSC 配分の定義

衡平配分ルールの１つであるENSC配分ルールを $\varphi^*(v)$ とすると，$\varphi^*(v)$ は以下で定義される：

$$\varphi_i^*(v) = v(N) - v(N \backslash \{i\}) +$$

$$\frac{v(N)-\sum_{j\in N}[v(N)-v(N\backslash\{j\})]}{n} \text{ for all } i\in N.$$

任意の $i\in N$ に対して，$v(N)-v(N\backslash\{i\})$ をプレイヤー i の全体提携 N に対する限界貢献度という．各プレイヤーの限界貢献度を全体提携で獲得する値 $v(N)$ から分離した残余総利得（すなわち，$v(N)$ からの非分離部分）を，プレイヤー全員に均等分配した値を ENSC 値 (Egalitarian Non-Separable Contribution value) と呼ぶ．ENSC配分ルールは任意の $N\in\mathcal{N}$ と任意の $v\in\mathcal{V}^N$ に対して，ENSC 値を配分ルールの帰結として対応させる関数である．

3 配分ルールの公理

次に協力ゲーム論で確立されている，配分ルールの様々な公理の定義を述べる．効率性公理，対称性公理，戦略同等性公理は，多くの配分ルールが満たす性質である．

- **効率性公理**: 配分ルール φ が効率性公理を満たすとは,任意の $N\in\mathcal{N}$ と任意の $v\in\mathcal{V}^N$ に対して，$\sum_{i\in N}\varphi_i(v)=v(N)$ が成り立つことをいう．

効率性公理は全体合理性公理とも呼ばれる．配分ルールの公理的研究では標準的な公理としてよく登場するものである．

プレイヤー $i,j\in N$ が（ゲーム $v\in\mathcal{V}^N$ について）対称的であるとは，任意の $S\subseteq N\backslash\{i,j\}$ に対して，$v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$ が成り立つことをいう．次の２つの公理は対称的なプレイヤーと配分の帰結の関係に関するものである．

- **対称性公理**: 配分ルール φ が対称性公理を満たすとは,任意の $N\in\mathcal{N}$,任意の $v\in\mathcal{V}^N$ に対して，あるプレイヤー $i,j\in N$ が対称的あるならば, $\varphi_i(v)=\varphi_j(v)$ が成り立つことをいう．

- **弱対称性公理**: 配分ルール φ が弱対称性公理を満たすとは，任意の $N\in\mathcal{N}$，任意の $v\in\mathcal{V}^N$ および任意のプレイヤー $i,j\in N$ が対称的あるならば,

$$\varphi_i(v)=c \text{ for all } i\in N$$

を満たす実数 c が存在することをいう．

対称性公理は，任意の提携に対する協力効果が等しいプレイヤー i と j に対して，プレイヤー i に関する配分の帰結とプレイヤー j に関する配分の帰結は等しくなくてはならないことを要請する．対称性公理は，もともとシャープレイ値と呼ばれる協力ゲームの解の公理の１つで，ゲーム論の指導的研究者の一人であるロイド・シャープレイによって導入された（Shapley, 1953）．一方，弱対称性公理は，すべてのプレイヤーが対称的であるときの対称性公理であると解釈できる．

- **戦略的同等性公理**: 配分ルール φ が戦略的同等性公理を満たすとは,任意の $N\in\mathcal{N}$, 任意の $i\in N$, 任意の $v,w\in\mathcal{V}^N$, および任意の実数 α に対して，

$$v(S)=\begin{cases} w(S)+\alpha & \text{if } S\subseteq N \text{ with } i\in S,\\ w(S) & \text{otherwise}\end{cases}$$

ならば，任意の $j\neq i$ に対して $\varphi_j(v)=\varphi_j(w)$ が成り立つことをいう．

戦略的同等性公理は，i の協力効果によって i を含む提携 S の値だけが増加（あるいは減少）するとき，i 以外の任意のプレイヤーの配分は変化しないことを意味する. 戦略的同等性公理はシャープレイ値の公理の１つとして知られている(Chun, 1989).

次に，２つの公理を新たに導入する．

- **限界貢献度に関する提携単調性公理**: 配分ルール φ が限界貢献度に関する提携単調性公理を満たすとは，任意の $N\in\mathcal{N}$, 任意の $v,w\in\mathcal{V}^N$，任意の $i\in N$ および，i を含む任意の提携 $S\subseteq N$ に対して，

$$v(N)-v(N\backslash S)\leq w(N)-w(N\backslash S)$$

を満たすならば，$\varphi_i(v)\leq\varphi_i(w)$ が成り立つことをいう．

この公理は,van den Brink(2007)で登場するCIS配分ルールの公理の１つである,提携単調性公理

とは数学的に異なる．CIS配分ルールにおける提携単調性公理は,任意の $N \in \mathcal{N}$, 任意の $v, w \in \mathcal{V}^N$, 任意の $i \in N$ および，i を含む任意の提携 $S \subseteq N$ に対して，$v(S) \leq w(S)$ を満たすならば，$\varphi_i(v) \leq \varphi_i(w)$ が成り立つことを配分ルールに要請している．この定義の中で出てくる各提携 S の提携値 (すなわち S が独力で獲得できる値) を，全体提携に対する提携 S の限界貢献度によって置き換えているのが，本論文における提携単調性公理である．この公理は，ゲーム w におけるプレイヤー i を含むすべての提携 $S \subseteq N$ の N に対する限界貢献度が，少なくともゲーム v におけるそれと同等以上であるならば，ゲーム w におけるプレイヤー i への配分は少なくともゲーム v におけるプレイヤー i への配分と同等以上でなくてはならないことを配分ルールに要請している．

- **可変的人口のもとでのランキング保存公理**: $N \subseteq N'$ を満たす任意の N, $N' \in \mathcal{N}$, 任意の $v \in \mathcal{V}^N$,および任意の $v' \in \mathcal{V}^{N'}$ に対して，
$$v(S) = v'((N' \backslash N) \cup S) - v'(N' \backslash N) \quad \text{for all } S \subseteq N$$
とする．このとき配分 φ が可変的人口のもとでのランキング保存公理を満たすとは，任意の $i, j \in N$ に対して，$\varphi_i(v) < \varphi_j(v)$ ならば $\varphi_i(v') \leq \varphi_j(v')$ が成り立つことをいう．

$N \subseteq N'$ を満たす２つのプレイヤーの集合 N および N' を考える.任意のプレイヤー $i, j \in N$ の配分ルールの帰結のランキングは，プレイヤーが増加してその集合が N' になっても保存されることを，ランキング保存公理は述べている．

ランキング保存公理は，Chun and Park (2012) で登場するCIS配分ルールの公理の１つである，可変的人口のもとでのフェア・ランキング公理とは数学的に異なる．両者は，部分ゲームでの配分ルールの帰結と元のゲームの配分ルールの帰結についてランキング保存性を要求している点で共通している．しかし，部分ゲームの数学的定義が両者で異なる．Chunand Park (2012) の部分ゲーム v は，通常の部分ゲームの定義に従って以下となる：N' をプレイヤーの集合とする．任意のゲーム $v' : 2^{N'} \to \mathbb{R}$ と任意の $N \subseteq N'$ に対して，v の定義域を 2^N に制限したものを v の N に関する部分ゲームという．一方，ランキング保存公理の部分ゲーム v は，任意のゲーム $v' : 2^{N'} \to \mathbb{R}$ と任意の $N \subseteq N'$ に対して，提携 $S \subseteq N$ が $N' \backslash N$ について持つ v' に関する限界貢献度をその提携値 $v(S)$ として与えている．このような限界貢献度を通じた部分ゲーム v と元のゲーム v' の配分の帰結に関するランキングが N 上で保存されていることを，ランキング保存公理は述べている．

4　ENSC配分ルールの２つの公理化

この節では，ENSC配分ルールの新しい公理化を行う．次の補題は協力ゲーム論の文献ではよく知られている結果だが，読者の理解の一助として証明を行う．

補題1　$|N| = 2$ とする．任意の $v \in \mathcal{V}^N$ に対して，以下の２つは同値である．

1: 配分ルール φ が効率性公理，対称性公理および戦略的同等性公理を満たす．

2: $\varphi_i(v) = \frac{1}{2}(v(N) + v(\{i\}) - v(\{j\}))$ *for all* $i \in N$ *and* $j \neq i$.

証明．Step 1: １ならば２が成り立つことを示す．戦略的同等性公理より，任意の $v, w \in \mathcal{V}^N$ および $\alpha = -w(\{i\}) + w(\{j\})$ に対して，

$$\begin{cases} v(\{i\}) = w(\{i\}) + \alpha = w(\{j\}) \\ v(\{j\}) = w(\{j\}) \\ v(N) = w(N) + \alpha = w(N) - w(\{i\}) + w(\{j\}) \end{cases}$$

ならば，$\varphi_j(v) = \varphi_j(w)$ が成り立つ．$v(\{i\}) = w(\{j\})$ および $v(\{j\}) = w(\{j\})$ から,$v(\{i\}) = v(\{j\})$ がいえる．対称性公理と効率性公理から

$$\varphi_i(v) = \varphi_j(v) = \frac{w(N) - w(\{i\}) + w(\{j\})}{2}.$$

この式と戦略的同等性公理より

$$\varphi_j(w) = \frac{w(N) + w(\{j\}) - w(\{i\})}{2}.$$

再び，効率性公理から

$$\varphi_i(w) = \frac{w(N) + w(\{i\}) - w(\{j\})}{2}.$$

Step 2: 2ならば1が成り立つことを示す．効率性公理が満たされることは自明である．プレイヤー i と j が対称的であるとすると，$v(\{i\}) = v(\{j\})$ である.このとき，$\varphi_i(v) = \varphi_j(v) = \frac{v(N)}{2}$ が成り立つので,対称性公理は満たされる.任意の $v, w \in \mathcal{V}^N$，および任意の実数 α に対して，

$$v(S) = \begin{cases} w(S) + \alpha & \text{if } i \in S, \\ w(S) & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする．このとき

$$\begin{aligned}\varphi_j(w) &= \frac{w(N) + w(\{j\}) - w(\{i\})}{2} \\ &= \frac{(v(N) - \alpha) + v(\{j\}) - (v(\{i\}) - \alpha)}{2} \\ &= \frac{(v(N) - \alpha) + v(\{j\}) - (v(\{i\}) - \alpha)}{2}\end{aligned}$$

従って，戦略的同等性公理は満たされる．以上により題意が示された．■

ENSC配分ルールの公理化に関する最初の結果を，以下で与える．

定理2 ENSC配分ルールは効率性公理，戦略的同等性公理，対称性公理および可変的な人口のもとでのランキング保存公理を満たすただひとつの配分ルールである．

証明. Step 1: ENSC配分ルールが効率性，対称性，戦略的同等性を満たすことは自明であるので，ENSC配分ルールがランキング保存公理を満たすことを示す. $N \subseteq N'$ を満たす,すべての $N, N' \in \mathcal{N}$ とすべての $i \in N$ に対して，ENSC値の定義とランキング保存公理の前提から

$$\varphi_i^*(v) = v'(N') - v'(N' \backslash \{i\}) + \frac{v'(N') - v'(N' \backslash N) - \sum_{j \in N}[v'(N') - v'(N' \backslash \{j\})]}{n}$$

に注意する．従って，すべての $i, j \in N$ に対して $\varphi_i^*(v) < \varphi_j^*(v)$ ならば，$v'(N') - v'(N' \backslash \{i\}) < v'(N') - v'(N' \backslash \{j\})$ となる．このとき再びENSC値の定義から

$$\varphi_i^*(v') = v'(N') - v'(N' \backslash \{i\}) + \frac{v'(N') - \sum_{j \in N'}[v'(N') - v'(N' \backslash \{j\})]}{n'} \quad \text{for } i \in N'$$

なので,すべての $i, j \in N$ に対して $\varphi_i^*(v') < \varphi_j^*(v')$ を得る．よってランキング保存公理を満たす．

Step 2: 補題1から，この定理が $|N| = 2$ なる任意の $v \in \mathcal{V}^N$ に対して成立している．プレイヤーの人数 n についての数学的帰納法で題意を示す．

帰納法の仮定により解の一意性が $|N| \leq n$ なるすべての $N \in \mathcal{N}$ に対して成立していると仮定する．一般性を失わず，$N = \{1, 2, \cdots, n\}$ および $N' = \{1, 2, \cdots, n+1\}$ とする．

すべての $S \subseteq N$ に対して $v(S) = v'((N' \backslash N) \cup S) - v'(N' \backslash N)$ を満たすような $v \in \mathcal{V}^N$ および $v' \in \mathcal{V}^{N'}$ を任意にとる.ランキング保存公理から任意の $i, j \in N$ に対して

$$\left(\varphi_i(v') - \varphi_j(v')\right)\left(\varphi_i(v) - \varphi_j(v)\right) \geq 0 \tag{1}$$

表記の簡便性のため

$$K := \frac{v(N) - \sum_{k \in N}[v(N) - v(N \backslash \{k\})]}{n}$$

とすると，帰納法の仮定から(1) 式は以下のように変形できる．

$$\left(\varphi_i(v') - \varphi_j(v')\right)((v(N) - v(N \backslash \{i\}) + K) - (v(N) - v(N \backslash \{j\}) + K)) \geq 0$$

すなわち，任意の $i, j \in N$ とすべての $S \subseteq N$ に対して $v(S) = v'((N' \backslash N) \cup S) - v'(N' \backslash N)$ を満たすような任意の $v \in \mathcal{V}^N$ および $v' \in \mathcal{V}^{N'}$ に対して

$$\left(\varphi_i(v') - \varphi_j(v')\right)\left(-v(N \backslash \{i\}) + v(N \backslash \{j\})\right) \geq 0 \tag{2}$$

次に，(2) 式が成り立つならば，$\varphi_i(v') - \varphi_j(v') = -v(N \backslash \{i\}) + v(N \backslash \{j\})$ が成り立つことを背理法で示す．

一般性を失わず,ある $i, j \in N$ とある $v \in \mathcal{V}^N$ および $v' \in \mathcal{V}^{N'}$ に対して

$$\varphi_i(v') - \varphi_j(v') > -v(N \backslash \{i\}) + v(N \backslash \{j\}) \tag{3}$$

が成り立つと仮定する. $\alpha := \frac{1}{2}(\varphi_i(v') - \varphi_j(v') - v(N \backslash \{i\}) + v(N \backslash \{j\}))$ とする．$w \in \mathcal{V}^N$ を $w(S) = v(S) + \alpha$ for all $S \ni j$, $w(S) = v(S)$ otherwiseで定義する．$w' \in \mathcal{V}^{N'}$ も v' と同様に定義する．すべての $S \subseteq N$ に対して $w(S) = w'((N' \backslash N) \cup S) - w'(N' \backslash N)$ に注意する．

戦略的同等性公理から,すべての $i \neq j$ に対して

$$\varphi_i(w) = \varphi_i(v), \ \varphi_i(w') = \varphi_i(v')$$

また

$$\varphi_j(w) = \varphi_j(v) + \alpha, \ \varphi_j(w') = \varphi_j(v') + \alpha$$

である．このとき

$$\varphi_i(w') - \varphi_j(w') = \varphi_i(v') - \varphi_j(v') - \alpha$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi_i(v') - \varphi_j(v') + v(N\backslash\{i\}) - v(N\backslash\{j\})) > 0 \quad (4)$$

が成り立つ.最後の不等号は (3) 式による.さらに

$$-w(N\backslash\{i\}) + w(N\backslash\{j\}) = -(v(N\backslash\{i\}) + \alpha) + v(N\backslash\{j\})$$

$$= -\frac{1}{2}(\varphi_i(v') - \varphi_j(v') + v(N\backslash\{i\}) - v(N\backslash\{j\})) < 0 \quad (5)$$

が成り立つ.最後の不等号は再び (3) 式による. (4) 式と (5) 式を勘案すると,$w \in \mathcal{V}^N$ および $w' \in \mathcal{V}^{N'}$ に対して

$$\left(\varphi_i(w') - \varphi_j(w')\right)(-w(N\backslash\{i\}) + w(N\backslash\{j\})) < 0$$

が成り立つが, これは(2) 式に矛盾する. ゆえにすべての $i, j \in N$ とすべての $v' \in \mathcal{V}^{N'}$ に対して

$$\varphi_i(v') + v(N\backslash\{i\}) = \varphi_j(v') + v(N\backslash\{j\}) \quad (6)$$

が成り立つ. (6) 式は v と v' の関係から次のように書き直せる.

$$\varphi_i(v') + v'(N'\backslash\{i\}) = \varphi_j(v') + v'(N'\backslash\{j\}) \quad \text{for all } i, j \in N \quad (7)$$

次に, $N'' = \{2, 3, \cdots, n+1\}$ とする. N' と N'' に関して同様の議論から

$$\varphi_i(v') + v'(N'\backslash\{i\}) = \varphi_j(v') + v'(N'\backslash\{j\}) \quad \text{for all } i, j \in N'' \quad (8)$$

を得る.この場合, すべての $S \subseteq N''$ に対して $v(S) = v'((N'\backslash N'') \cup S) - v'(N'\backslash N'')$ を満たすような $v \in \mathcal{V}^N$ および $v' \in \mathcal{V}^{N'}$ を任意にとっていることに注意する. (7) 式と (8) 式を合わせて

$$\varphi_i(v') + v'(N'\backslash\{i\}) = \varphi_j(v') + v'(N'\backslash\{j\}) \quad \text{for all } i, j \in N' \quad (9)$$

いま $i \in N'$ を固定する.このとき (9) 式の両辺に $-v'(N')$ を加えたうえですべての $j \in N'$ について足しあげると

$$(n+1)\left(\varphi_i(v') - v'(N') + v'(N'\backslash\{i\})\right) = \sum_{j \in N'}\left(\varphi_j(v') - v'(N') + v'(N'\backslash\{j\})\right) = v'(N') - \sum_{j \in N'}\left(v'(N') - v'(N'\backslash\{j\})\right).$$

ゆえに

$$\varphi_i^*(v') = v'(N') - v'(N'\backslash\{i\}) + \frac{v'(N') - \sum_{j \in N'}[v'(N') - v'(N'\backslash\{j\})]}{n+1}.$$

以上より題意が示された. ■

では, 可変的人口のもとでのランキング保存公理の代わりに, 他の公理で置き換えることでENSC配分ルールの公理化は可能であろうか? 次の結果は, 対称性公理を弱めると, 限界貢献度に関する提携単調性公理による置き換えによって,ENSC配分ルールの公理化は可能であることを示している.

定理3 *ENSC*配分ルールは効率性公理, 戦略的同等性公理, 弱対称性公理および限界貢献度に関する提携単調性公理を満たすただひとつの配分ルールである.

証明. Step 1: ENSC配分ルールが効率性と戦略的同等性公理を満たすことは自明であるので, ENSC配分ルールが弱対称性公理と提携単調性公理を満たすことを示す.

まず弱対称性公理の前提から, 任意の $i, j \in N$ に対して $v(N\backslash\{i\}) = v(N\backslash\{j\})$が成り立つ. これとENSCルール $\varphi^*(v)$ の定義から $\varphi_i^*(v) = \varphi_j^*(v)$. よって弱対称性公理を満たす.

次に提携単調性公理の前提から, $i \in N$ に対して $v(N) - v(N\backslash\{i\}) \leq w(N) - w(N\backslash\{i\})$とする.このときENSCルール $\varphi^*(v)$ の定義から $\varphi_i^*(v) \leq \varphi_i^*(w)$. よって提携単調性公理を満たす.

Step 2: 配分ルール φ が 4 つの公理を満たすとする.任意に $v \in \mathcal{V}^N$ をとり$K := v(N) - \sum_{j \in N}[v(N) - v(N\backslash\{j\})]$を定義する. 任意に固定された $i^* \in N$ に対して, $w^{i^*} \in \mathcal{V}^N$ を次のように定義する.

$$w^{i^*}(S) := \begin{cases} K & \text{if } S = N \\ v(N) - \sum_{j \in N\backslash\{i^*\}}[v(N) - v(N\backslash\{j\})] - \max_{T \subseteq N:\, T \ni i^*}(v(N) - v(N\backslash T)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

効率性公理と弱対称性公理から, 任意の $j \in N$ に対して $\varphi_j(w^{i^*}) = \frac{K}{n}$となる. さらに $i^* \in S$ なる任意の $S \subseteq N$ に対して$\tilde{w}^{i^*}(S) = w^{i^*}(S) + v(N) - v(N\backslash\{i^*\})$, かつ $i^* \notin S$ なる任意の $S \subseteq N$ に対して $\tilde{w}^{i^*}(S) = w^{i^*}(S)$ となる $\tilde{w}^{i^*} \in \mathcal{V}^N$ を定義する. 戦略的同等性公理から,任意の $j \neq i^*$ に対して $\varphi_j(\tilde{w}^{i^*}) = \varphi_j(w^{i^*}) = \frac{K}{n}$, および $\varphi_{i^*}(\tilde{w}^{i^*}) = \varphi_{i^*}(w^{i^*}) + v(N) - v(N\backslash\{i^*\}) = \frac{K}{n} + v(N) - v(N\backslash\{i^*\})$ となる.

ここで $i^* \in S$ なる任意の $S \subseteq N$ に対して

$$\tilde{w}^{i^*}(N) - \tilde{w}^{i^*}(N \backslash S)$$
$$= (K + v(N) - v(N\backslash\{i^*\})) - \left(v(N) - \sum_{j \in N\backslash\{i^*\}} [v(N) - v(N\backslash\{j\})] - \max_{T \subseteq N:\ T \ni i^*} (v(N) - v(N\backslash T)) \right)$$
$$= v(N) - \sum_{j \in N\backslash\{i^*\}} [v(N) - v(N\backslash\{j\})] - (v(N) - v(N\backslash\{i^*\})) + v(N) - v(N\backslash\{i^*\})$$
$$- v(N) + \sum_{j \in N\backslash\{i^*\}} [v(N) - v(N\backslash\{j\})] + \max_{T \subseteq N:\ T \ni i^*} (v(N) - v(N\backslash T))$$
$$= \max_{T \subseteq N:\ T \ni i^*} (v(N) - v(N\backslash T))$$
$$\geq v(N) - v(N\backslash S)$$

が成り立つので，提携単調性公理から，

$$\varphi_{i^*}(v) \leq \varphi_{i^*}(\tilde{w}^{i^*}) = \frac{K}{n} + v(N) - v(N\backslash\{i^*\})$$

となる．これは任意の $i \in N$ に対して，

$$\varphi_i(v) \leq \frac{K}{n} + v(N) - v(N\backslash\{i\}) \qquad (10)$$

が成り立つことを意味する．効率性公理より(10)式は任意の $i \in N$ について等号で成り立つ．それゆえ任意の $i \in N$ に対して

$$\varphi_i(v) = \frac{K}{n} + v(N) - v(N\backslash\{i\})$$
$$= v(N) - v(N\backslash\{i\}) + \frac{v(N) - \sum_{j \in N}[v(N) - v(N\backslash\{j\})]}{n} = \varphi_i^*(v).$$

よって題意が示された．■

5 CIS配分ルールの公理系との比較

この節では，CIS 配分ルールの様々な公理系と本論文の結果（定理１および定理２）について比較検討する．まず衡平配分ルールの１つであるCIS配分ルールを $\varphi^{**}(v)$ とすると，$\varphi^{**}(v)$は以下で定義される：

$$\varphi_i^{**}(v) = v(\{i\}) + \frac{v(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\})}{n} \quad \text{for all } i \in N.$$

各プレイヤーが独力で獲得できる値を全体提携で獲得する値 $v(N)$ から分離した残余総利得を，プレイヤー全員に均等分配した値をCIS値((Center-of gravity of Imputation Set value)と呼ぶ．CIS配分ルールは任意の $N \in \mathcal{N}$ と $v \in \mathcal{V}^N$ に対して,CIS値を配分ルールの帰結として対応させる関数である．

Chun and Park (2012) は「可変的人口のもとでのフェア・ランキング公理」と呼ばれる公理を導入した．

- **可変的人口のもとでのフェア・ランキング公理**： $N \subseteq N'$ を満たす任意の $N, N' \in \mathcal{N}$, 任意の $v \in \mathcal{V}^N$ および任意の $v' \in \mathcal{V}^{N'}$ に対して，
  $$v(S) = v'(S) \quad \text{for all } S \subseteq N$$
  とする．このとき，配分ルール φ が可変的人口のもとでのフェア・ランキング公理を満たすとは，任意の$i, j \in N$ に対して，$\varphi_i(v) < \varphi_j(v)$ ならば $\varphi_i(v') \leq \varphi_j(v')$ が成り立つことをいう．

Chun and Park (2012) は，CIS配分ルールが効率性公理，戦略的同等性公理，対称性公理および可変的人口のもとでのフェア・ランキング公理を満たすただひとつの配分ルールであることを証明した．本論文の定理１が示しているように，Chun and Park (2012) のフェア・ランキング公理を可変的人口のもとでのランキング保存公理に置き換えるだけで，CIS配分ルールがENSC配分ルールになる．数学的には，部分ゲームの定義の違いによって生じる公理の相違が，CIS配分ルールとENSC配分ルールの公理化の相違を決定付けているといえる．

一方，van den Brink (2007) は，以下で定義される「提携単調性公理」を用いて，CIS配分ルールを公理化できることを証明した．

- **提携単調性公理**: 配分ルール φ が提携単調性公理を満たすとは，任意の $N \in \mathcal{N}$, 任意の $v, w \in \mathcal{V}^N$, 任意の $i \in N$ および，i を含む任意の提携 $S \subseteq N$ に対して，
  $$v(S) \leq w(S)$$
  を満たすならば，$\varphi_i(v) \leq \varphi_i(w)$ が成り立つことをいう．

van den Brink (2007) は，CIS配分ルールが効

率性公理，戦略的同等性公理，弱対称性公理および提携単調性公理を満たすただひとつの配分ルールであることを証明した．本論文の定理２が示しているように，van den Brink (2007) の提携単調性公理を限界貢献度に関する提携単調性公理に置き換えるだけで，CIS配分ルールがENSC配分ルールになる．数学的には，限界貢献度による提携形ゲームの定義によって生じる公理の相違が，CIS配分ルールとENSC配分ルールの公理化の相違を決定付けているといえる．

６　結びにかえて：公理化の反双対性理論との関連について

本論文では，ENSC配分ルールに関する２つの新しい公理化を証明し，CIS配分ルールの公理系との比較を論じた．それではCIS配分ルールとENSC配分ルールの公理間には一体どのような一般的な数理構造が背後に隠されているのだろうか？筆者の一連の研究（Oishiand Nayakama (2010), Oishi (2011), Oishi et al. (2013)）で提唱された「公理化の反双対性理論」の観点から考えると，CIS配分ルールとENSC配分ルールの公理間には「公理の反双対性」と呼ばれる関係があるということがわかる．ここでは，本研究の結果と反双対性理論との関連について，簡潔に言及する．

任意の $N \in \mathcal{N}$ と任意の $v \in \mathcal{V}^N$ に対して，

$$v^{ad}(S) \equiv -v(S) + v(N \backslash S)$$

で定義される関数 $v^{ad} : 2^N \to \mathbb{R}$ を v の反双対ゲームと呼ぶ(Oishi and Nayakama, 2010).

いまゲームの集合 $\mathcal{V}$ が存在して，任意の $v, v^{ad} \in \mathcal{V}$ を満たすとする．$\mathcal{V}$ 上の配分ルール φ を所与にして，反双対ルール φ^{ad} を以下のように定義する(Oishi et al. 2013).

$$\varphi^{ad}(v) \equiv -\varphi(-v^{ad}) \quad \text{for all } v \in \mathcal{V}.$$

特に $\varphi^{ad}(v) \equiv \varphi(v)$ が成り立つとき，配分ルール φ は自己反双対的であるという．

２つの配分ルールが互いに反双対的である場合，それぞれの配分ルールの公理の間にも反双対的な関係がある．このような考え方は，Thomson and Yeh (2008) で提唱された破産問題の配分ルールの公理に関する理論を，さらに一般化したものといえる．形式的には，２つの公理が互いに反双対であるとは，次のことをいう．

「２つの公理が互いに反双対であるとは，配分ルール φ の帰結が一方の公理を満たすときはいつでも，反双対的な配分ルール φ^{ad} の帰結が他方の公理を満たさなくてはならないことをいう(Oishi et al. 2013).」

興味深いことに，すべての提携形ゲームを定義域としたときに，CIS配分ルールとENSC配分ルールは互いに反双対的であることがわかるので，それぞれの配分ルールの公理にも反双対性が隠されている．実際，以下の事実を証明することが可能である．

- 提携単調性公理と限界貢献度を通じた提携単調性公理は互いに反双対的である．
- 可変的人口のもとでのフェア・ランキング公理と可変的人口のもとでのランキング保存公理は互いに反双対的である．
- 効率性公理，対称性公理および戦略的同等性公理は，それぞれ自己反双対的である．

このように反双対性という単一概念が，配分ルールの帰結，配分ルールの公理，さらに配分ルールの公理化に関する理論の橋渡しをしてくれる．Oishi et al. (2013) では，この反双対性理論の基本的枠組みを構築し，その幅広い応用可能性について，コア配分ルール，シャープレイ配分ルール，Dutta-Ray 配分ルール(Dutta and Ray, 1989) に焦点を当てながら詳細に検討している．公理化の反双対性理論について興味のある読者は，Oishi et al. (2013) を参照されたい．

（2013年12月2日受付、2014年1月14日受理）

参考文献

[1] Aumann. R.J. and M. Maschler. “Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud.” *Journal of Economic Theory* 36, 195-213, 1985.

[2] Chun, Y. “A new axiomatization of the Shapley value.” *Games and Economic*

Behavior, 1:119-130, 1989.

[3] Chun. Y. and B. Park. "Population solidarity, population fair-ranking, and the egalitarian value." *International Journal of Game Theory*, 41(2): 255-270, 2012.

[4] Driessen. T.S.H., and Y. Funaki. "Reduced game properties of egalitarian division rules for TU games." In: T. Parthasarathy et al. (Eds.) *Game Theoretical Applications to Economics and Operations Research*, pp.85-103, Kluwer Academic Publishers, 1997.

[5] Dutta. B. and D. Ray. "A concept of egalitarianism under participation constraints." *Econometrica*, 57(3): 615-635, 1989.

[6] Hwang. Y.A. "Associated consistency and equal allocation of nonseparable costs." *Economic Theory*, 28:709-719, 2006.

[7] Moulin.H. "The separability axiom and equal sharing methods." *Journal of Economic Theory* 36:120-148, 1985.

[8] Oishi. T. "Collusive behavior of bidders in English auctions: a cooperative game theoretic analysis." *The B.E. Journal of Theoretical Economics*: Vol. 10: Iss. 1 (Contributions), Article 15, 1-13, 2010

[9] Oishi, T. *Distributive Function of Informal and Formal Economic Systems: A Cooperative Game Theoretic Analysis*. Ph. D. dissertation, Keio University, 2011.

[10] Oishi. T. and M. Nakayama. "Anti-dual of economic coalitional TU games." *Japanese Economic Review*, 60:560-566, 2009.

[11] Oishi, T., M. Nakayama, T. Hokari, and Y. Funaki, "Duality and anti-duality in TU games applied to solutions, axioms, and axio matization," Aomori Public University, Keio University, and Waseda University, mimeo, 2013.

[12] Peleg. B. and P. Sudholter. *Introduction to the Theory of Cooperative Games*. Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrechet/London, 2003.

[13] Rawls. J. A *Theory of Justice*, Oxford University Press, New York and Oxford, 1971.

[14] Schmeidler. D. "The nucleolus of a characteristic function game." *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17:1163-1170, 1969.

[15] Shapley. L.S. "A value for n-person games." In: H. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, volume 2, pages 307-317. Princeton University Press, 1953.

[16] Suzuki. M. and M. Nakayama. "A cost assignment of the cooperative water resource development: a game theoretical approach." *Management Science*, 10:1081-1086, 1976.

[17] Thomson. W. and C.H. Yeh. "Operators for the adjudication of conflicting claims." *Journal of Economic Theory*, 143:177-198, 2008.

[18] van den Brink.R. "Null or nullifying players: the difference between the Shapley value and equal division solutions." *Journal of Economic Theory*, 136:767-775, 2007.

[19] van den Brink. R. and Y. Funaki. "Axioma tizations of a class of equal surplus sharing solutions for TU games." *Theory and Decision*, 67:303-340, 2009.

[20] von Neumann. J. and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.

[21] 中山幹夫, 船木由喜彦, 武藤滋夫. 協力ゲーム理論. 勁草書房, 2008 年.

脚　注

1：協力ゲーム論の公理的研究に関する大学院・研究者向けの国際的なテキストとして，例えばPeleg and Sudholter（2003）がある．

2：CIS配分ルールの“CIS”に対応する適切な訳語は文献では知られていない.ここでは協力ゲーム論の日本語研究書として定評のある中山・船木・武藤(2008)における訳語を踏襲して,CIS配分ルールと呼ぶことにする.

３：ENSC配分ルールの“ENSC”に対応する適切な訳語は文献では知られていない．ここでは中山・船木・武藤（2008）における訳語を踏襲して，ENSC配分ルールと呼ぶことにする．

４：ロールズの差別原理を反映した配分ルールを「仁配分ルール」と呼ぶ．この配分ルールはSchemeidler(1969) によって導入され，様々な経済問題に応用された．例えば，Aumann and Maschler (1985) やOishi (2010) を見よ．

５：本論文では，配分ルールの定義域をすべての提携形ゲームの集合としている．これは協力ゲーム論の公理的研究の系譜において，標準的な設定である．

６：密には，提携形ＴＵゲームと呼ばれる．ここでいうＴＵとは譲渡可能性効用を意味する．提携形ＴＵゲームでは，各プレイヤーが譲渡可能性効用を持ち，サイド・ペイメントを通じて効用がプレイヤー間で譲渡可能であることが前提になっている．

謝　辞

本研究は京都大学経済研究所共同利用・共同研究拠点プロジェクト研究の一環として行ったものである．筆者に対する京都大学経済研究所の研究支援に感謝したい．

New Axiomatizations of an Egalitarian Allocation Rule in Cooperative Game Theory

Takayuki Oishi

Abstract

We axiomatize the ENSC allocation rule that yields the egalitarian non-separable contribution value for all TU games. In this paper, we introduce two axioms: coalitional monotonicity measured by marginal contributions, and population ranking preservation.We show two full-characterizations of the ENSC allocation rule (Theorems 1 and 2). In Theorem 1, the ENSC allocation rule is the only allocation rule satisfying efficiency, strategic equivalence, symmetry, and population ranking preservation. In Theorem 2, on the other hand, the ENSC allocation rule is the only allocation rule satisfying efficiency, strategic equivalence, weak symmetry, and coalitional monotonicity measured by marginal contributions.