

神経ネットモデルにおける臨界現象

佐藤 和弘*

1. 序

近年、科学の様々な分野で臨界現象が注目されている¹⁾。この論文では、神経ネット（脳のモデル）もまたそのような臨界性を示すシステムの一例であることを示そう。神経ネットはいわゆる興奮性媒質(excitabile media)の一種であり、さらに広い意味での散逸的動力学システムに属する。神経ネットのどこかを局所的に刺激すると、興奮がそこを原点として広がり、やがてある一群のニューロン集団（クラスター）が自己励起的に発火を繰り返して、興奮を持続するようになる。この励起クラスターのサイズは様々で、一般には刺激の原点に依存する。したがって、刺激場所をランダムにいろいろ変えれば、様々なサイズの励起クラスターを作ることができる。神経ネットの興奮性(excitability)が増加するほど、励起クラスターの最大サイズは増加するから、興奮性を徐々に増して行くと、やがて神経ネットに臨界状態が実現されて、励起クラスターの局在・非局在転移が見られるであろう。

我々の神経ネットモデルの基本構成は次のようである。1) 相互に結合した「ニューロン」とは2状態素子(binary decision element)のことである。これは二つの状態（すなわち発火状態か静止状態か）のいずれか一方をとる。2) ニューロンは興奮性か抑制性の二つの種類に分類される。興奮性ニューロンは発火すると、結合先のニューロンに正（興奮を助長する）の刺激を伝達する。逆に抑制性ニューロンは発火すると、結合先のニューロンに負（興奮を抑える）の刺激を伝達する。3) すべてのニューロンは、離散的な時間ステップごとに同期してその状態を更新する。これはマッカロ・ピッツ(McCulloch-Pitts)型方程式の決定論的規則に従って行われる。その規則とは、もし受け取った刺激の総和がしきい値(Threshold)を越えたら、次のステップでそのニューロンは発火状態になるというものである。

$x_i(t)$ を i 番目のニューロンの時刻 t における状態変数とする。ここで $x_i = 1$ (発火状態)あるいは $x_i = 0$ (静止状態)である。上で述べた状態更新の規則は次のように書ける。

$$x_i(t+1) = \theta \left(\sum_j K_{ij} x_j(t) - T_0 \right)$$

ここで θ は階段関数（もし $y \leq 0$ なら $\theta(y) = 0$ 、もし $y > 0$ なら $\theta(y) = 1$ ）、 K_{ij} は結合係数（ j 番目から i 番目のニューロンへの伝達される刺激の大きさ）でニューロン j が興奮性なら $K_{ij} > 0$ で抑制性なら $K_{ij} < 0$ 、そして T_0 はニューロン発火のしきい値である。我々はさらに K_{ij} が刺激の送り手ニューロン j にのみ依存すると仮定する。

*青森公立大学

すなわち

$$K_{ij} = k_j C_{ij}$$

ここで C_{ij} はニューロンペアが結合していれば1、そうでなければ0の値をとる。

結合のマトリクス C_{ij} は、神経ネットのトポロジーを決める重要なものである。この研究ではニューロンが局所的に結合したネットに興味があるので、すべてのニューロンは正方格子の上に配置するとする。そして各ニューロンは最近接の4つのニューロンとのみ結合するとする。どの格子点をどのニューロンが占めるかは全くランダムとする。したがって興奮性ニューロンの密度が n の神経ネットの場合は、興奮性ニューロンは確率 n で（抑制性ニューロンは確率 $1 - n$ で）各格子点を占めることになる。このモデルだと $C_{ij} = C_{ji}$ （結合マトリクスは対称）であるが、一般に $K_{ij} \neq K_{ji}$ （結合係数は非対称）であることに注意する。以下、この神経ネットモデルを「セル型ランダム神経ネット」と呼び、CRN (Cellular Random Net) と略記する。これとは対照的な、結合トポロジーがランダムな神経ネットの振る舞いについては、参考文献²⁾を参照されたい。

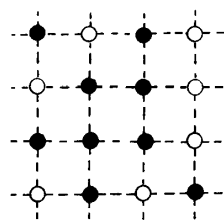
ニューロンの刺激伝達の強さを表わす k_j の値は、ある範囲である分布をとるものとする。ここでは二つのタイプの分布関数を考える。1) 一様分布関数型：興奮性ニューロンは $(0, W]$ の範囲で一様な分布、同様に抑制性ニューロンは $[-W, 0)$ の範囲で一様な分布。これをtype-U分布と記す。2) デルタ関数型：興奮性ニューロンは W の位置にピーク、同様に抑制性ニューロンは $-W$ の位置にピークを持つデルタ関数。これをtype-D分布と記す。一様分布関数、あるいはデルタ関数の高さは、それぞれ密度 n と $1 - n$ に比例する (図1参照)。これをtype-D分布と記す。一様分布関数、あるいはデルタ関数の高さは、それぞれ密度 n と $1 - n$ に比例する (図1参照)。

2. CRNネットの励起クラスター

CRNネットのシステムパラメータは、興奮性ニューロンの密度 n (0から1の範囲) と発火のしきい値 T ($= T_0/W$ で規格化すれば0から1の範囲) である。まずパラメータ n と T を固定したうえで、コンピュータシミュレーションは周期的境界条件をつけた有限サイズのモデルに対して行われる。この節では一辺のサイズが $L = 50$ の正方格子（したがってニューロンの総数は $N = L \times L = 2500$ ）を用いた結果について議論する。

時刻 $t = 0$ で、すべてのニューロンを静止状態におく。それから一つのニューロンをランダムに選び発火させる。すると場合にもよるが、この発火点から連鎖反应的に、周りのニューロンに「火」が広がって行くのが見られる。しばらく経つと（過渡期を過ぎると）、CRNの上

a)



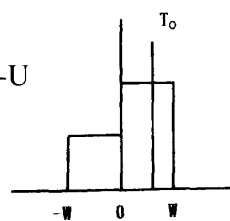
2D Square Lattice

● 興奮性ニューロン

○ 抑制性ニューロン

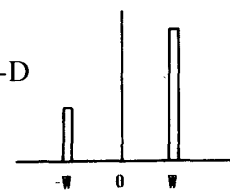
b)

Type-U

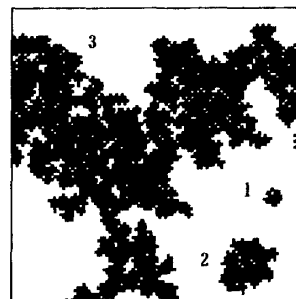


c)

Type-D



d)



励起クラスター

図 1 (a) 正方向格子の上のセル型ランダム神経ネットワーク。(b) 結合係数 k_j の分布関数 (一様分布型) : 興奮性ニューロンは $(0, W]$ の範囲で、抑制性ニューロンは $[-W, 0)$ の範囲で一様な分布 (type-U 分布)。(c) 結合係数 k_j の分布関数 (デルタ関数型) : 興奮性ニューロンは W の位置にピーク、同様に抑制性ニューロンは $-W$ の位置にピークを持つデルタ関数 (type-D 分布)。(d) CRN ネットに励起されたクラスター (1 は小さい、2 は中くらい、3 はシステムサイズに匹敵するサイズの励起クラスターの例)。

にあるサイズからなる、周期的な発火のパターン（励起クラスター）が形成されるのがわかる。クラスターのサイズは発火点に依存する。過渡期はクラスターのサイズが大きくなれば長くなるが、最終的にクラスターを構成するニューロンの一群は早い時期に決まってしまう（火はある範囲にすみやかに燃え広がり、それより外へは広がって行かない）。この性質があるので、仮に過渡期がコンピュータシミュレーションの最大継続ステップを上回っていたとしても、励起クラスターのサイズを決定することに問題はない。図1(d)に異なる発火点から作られた励起クラスターの例をいくつか示す。

ここで形成された最大サイズのクラスターに注目する。興奮性ニューロンの密度 n が増加するかしきい値 T が減少する（すなわちネットのexcitabilityが増大する）と、このクラスターのサイズはシステムのサイズに匹敵するようになる。そして周期的境界条件があるので、クラスターの見かけのサイズは無限大となる。無限に大きいネットの場合であれば、なにかある臨界密度 n_c （あるいは臨界しきい値 T_c ）があって、この臨界点において最大クラスターのサイズが発散するであろう。この最大クラスターの「局在・非局在転移」は、物理で良く知られたパーコレーション転移という現象に類似している。パーコレーションの場合は、格子点（サイト）の上を確率 p で粒子が占めていて、最近接格子点に粒子があればそれらを結んで連結クラスターが作られる。占有率 p が増加すると連結クラスターのサイズも増加し、やがて臨界の占有率 p_c でそのサイズが発散する。これを（サイト）パーコレーション転移といい、純粹にトポロジ的で、しかも最もシンプルな局在・非局在転移の例である。

3. 励起クラスターの平均サイズと転移の相図

励起クラスターの平均サイズを調べよう。システムパラメータを固定しておき、ニューロンを正方格子にランダムにばらまくことにより、CRNネットを作る。作るネットの総数は数千である。各ネットに対して、発火点をランダムに選び、5個程度の励起クラスターを発生させる。この手続きをすべてのネットに対して繰り返すことにより、励起クラスターのサイズ分布のデータを得ることができる。それからクラスターの平均サイズ $\langle s \rangle$ を計算する。次にシステムパラメータを変えて同様なシミュレーションを行い、 $\langle s \rangle$ のシステムパラメータ依存性を調べる。

興奮性ニューロンの密度が臨界値より小さい場合 ($n < n_c$)、あるいは発火しきい値が臨界値より大きい場合 ($T > T_c$)、 $\langle s \rangle$ は n あるいは T に指数関数的依存性を示すであろう。すなわち n について書けば

$$\langle s \rangle \propto (n_c - n)^{-\gamma}$$

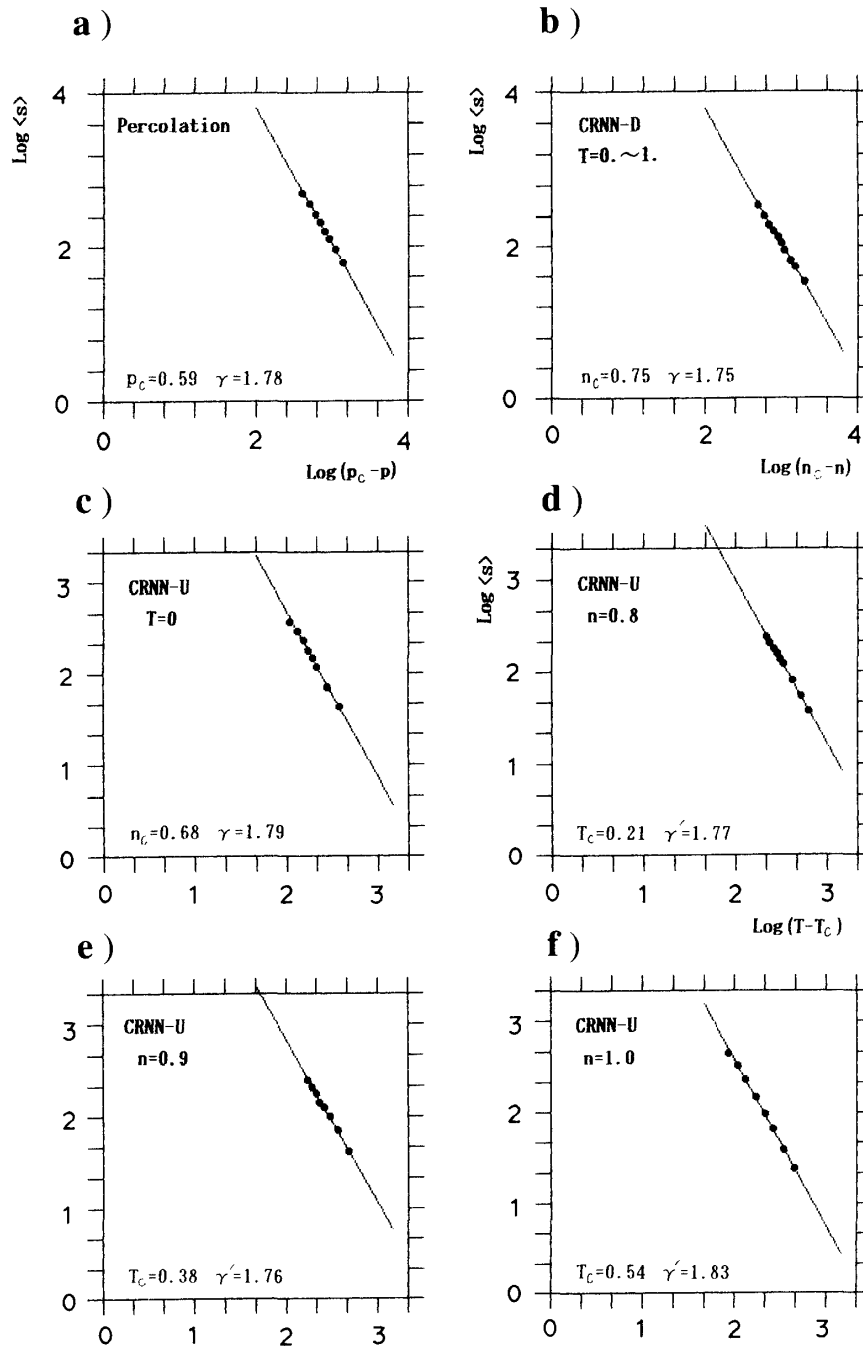


図2 (a)サイトパーコレーションの場合 $\log \langle s \rangle$ 対 $\log(p_c - p)$ プロット。(b)~(f) CRNNネットの場合 $\log \langle s \rangle$ 対 $\log(n_c - n)$ 対あるいは $\log \langle s \rangle$ 対 $\log(T - T_c)$ プロット。グラフが直線になるように n_c あるいは T_c を調整した。直線の傾きから指数 γ も同時に決まる。

である。そこで両対数グラフを用いて、 $\log \langle s \rangle$ を $\log(n_c - n)$ に対してプロットし、この関係が直線になるように臨界値 n_c を調整する。こうした手続きを経て我々は、臨界値 n_c そのものと、臨界指数 γ とを同時に決めることができる（いわゆるtwo-parameter fitting）。

図2(b)~(f)は $\log \langle s \rangle$ を $\log(n_c - n)$ 、あるいは $\log(T - T_c)$ に対してプロットした。直線は最小二乗法で決めた。比較のためにサイトパーコレーションの場合の $\log \langle s \rangle$ 対 $\log(p_c - p)$ プロットも図2(a)に示した。

パーコレーション転移の場合、 $p_c = 0.59275\dots$ （無限サイズの正方格子）で、また $\gamma = 43/18 = 2.389\dots$ （二次元格子の場合は普遍の値）であることが知られている。シミュレーションでは $L = 50$ の有限サイズの系に対して $p_c = 0.59 \sim 0.6$ 、および $\gamma = 1.8 \pm 0.2$ が得られた。臨界指数は真の値の25%も小さくなったが、臨界密度は2%の精度で決定されている。我々は、CRNネットの n_c および T_c もまた、同程度の精度で決まっているものと期待する。システムパラメータが異なるすべてのCRNネットに対して、 $\gamma = 1.8 \pm 0.1$ という結果が得られていることに注目しよう。

図3は $n - T$ パラメータ空間の中で、励起クラスターの局在状態と非局在状態とを分ける相図を示す。実線（臨界状態を示す線）の上で相転移が起きる（臨界線がよい直線となる理由はまだわからない）。

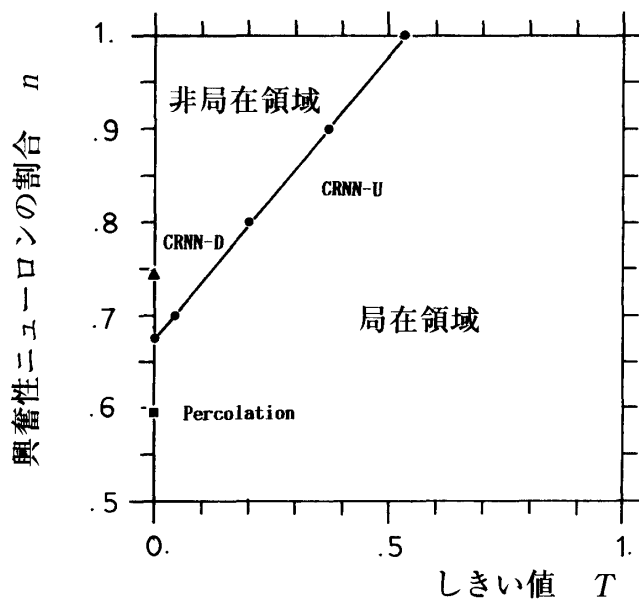


図3 $n - T$ 平面での相図。 $T = 0$ の軸上にはサイトパーコレーションの臨界点も示している。

4. Spanningクラスタのフラクタル次元

$L = 100$ というサイズの大きいCRNネットを用いて、臨界点におけるより大きな励起クラスタを作ってみよう。図4は、システムパラメータが異なるいくつかのCRNネットに対し、見かけが無限大のクラスタ（spanningクラスタと呼ぶ）をサンプルしたものである（比較のためサイトパーコレーションの場合のspanningクラスタも示した）。発火しないニューロンが作る空隙（ボイド）が、興奮性ニューロンの割合 n の増加とともに減少していくのがわかる。しかしどのspanningクラスタにおいても、その形状を見ると自己相似的な性質（フラクタル性）が明らかである。

次にspanningクラスタの任意の場所に半径 R の円を描き、その円内に入る発火ニューロンの数をカウントしよう。これをさまざまな場所（100箇所）に対して行い、さらに数個のspanningクラスタについてサンプル平均する。その結果を R の関数として $N(R)$ と表わすことにする。 $N(R)$ の期待される関数形はべき関数、すなわち

$$N(R) \propto R^{D_f}$$

であり、ここで D_f はフラクタル次元である。計算の結果を図5に示す（便宜上、 $\log N(R)/R$ 対 $\log R$ プロット）。どのシステムパラメータを持つCRNネットについても、 $D_f = 1.87 \sim 1.91$ というフラクタル次元が得られる。なおサイトパーコレーションの場合は $D_f = 91/48 = 1.896\dots$ である。

臨界点における、さまざまなクラスタのサイズ分布を調べることもできる。サイズが s のクラスタの分布関数を $F(s)$ としよう。 $F(s)$ はやはりべき関数となり、 $F(s) \propto s^{-\tau}$ で表わされる。分布関数 $F(s)$ を決めるのにはサイズ $L = 50$ のCRNネットを5000から10000個用いた。図6に $\log sF(s)$ 対 $\log s$ のグラフを示す。ネットのサイズが小さいので直線領域は狭いが、 $s = 50 \sim 500$ の範囲で、臨界指数 $\tau = 1.87 \sim 2.02$ が得られた。幸い、スケーリング理論⁹⁾によれば

$$\tau = 1 + d/D_f$$

という関係が成り立つ（ d は空間次元、今の場合は2）ので、 τ はフラクタル次元から決めることもできる。なおパーコレーション転移の場合は $\tau = 187/91 = 2.06\dots$ となる。

5. 議論

この論文で、我々は正方CRNネットの励起クラスタの場合について、局在・非局在転移が

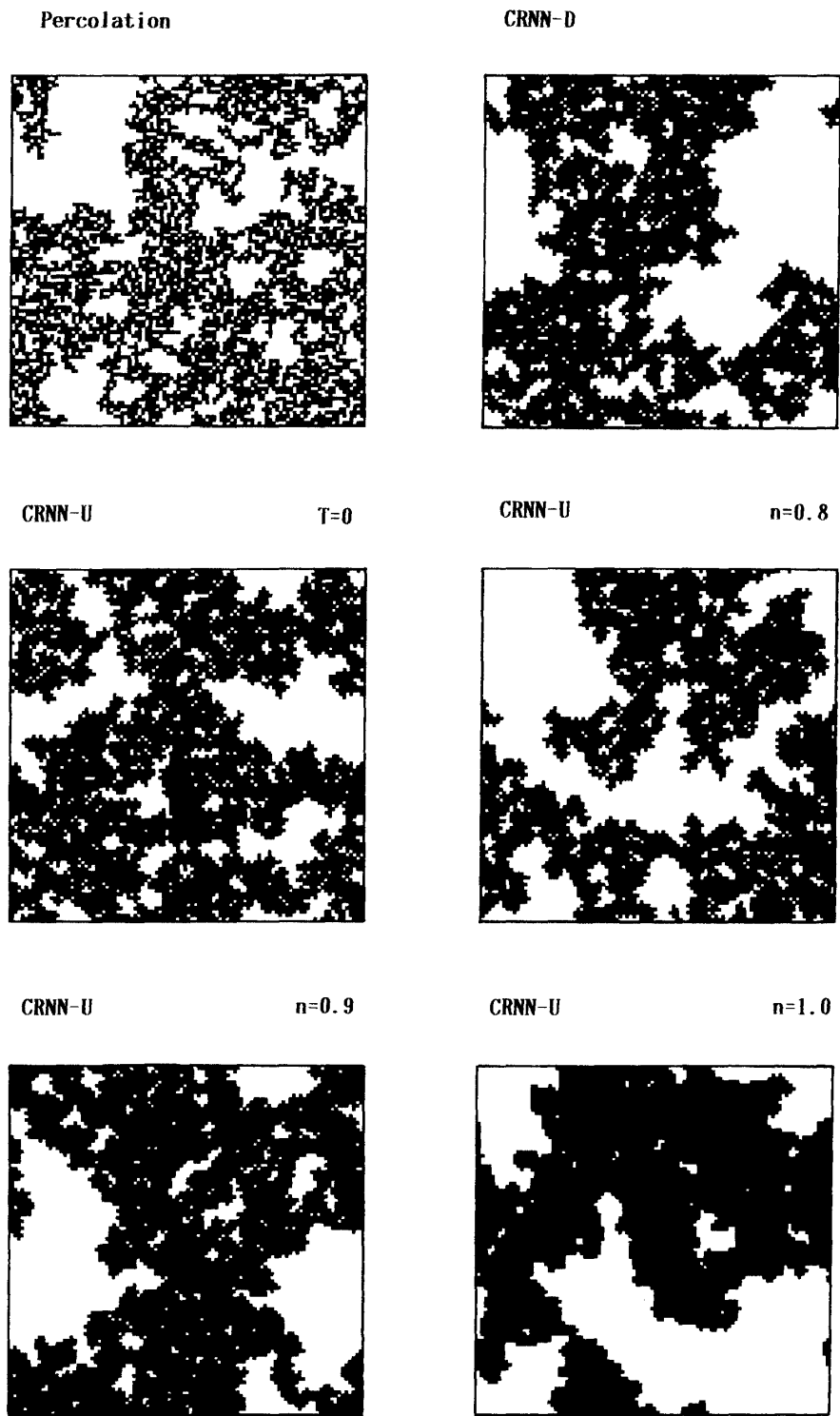


図 4 spanning クラスターの例。システムサイズは $N=100 \times 100$ 。

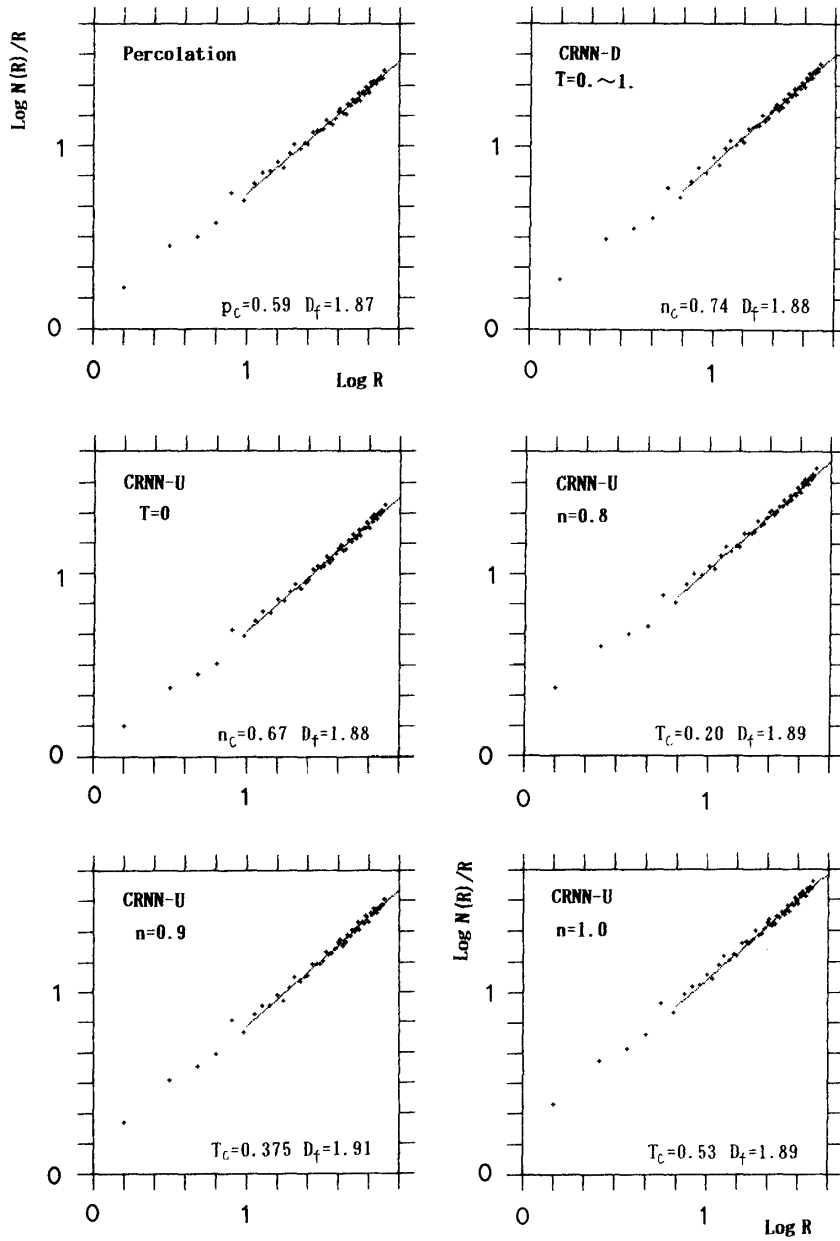


図 5 spanning クラスターのフラクタル次元。両対数グラフの直線の傾きからフラクタル次元 D_f が決まる。ネットのタイプによらず、ほぼ共通の次元 $D_f=1.87 \sim 1.91$ が得られる。

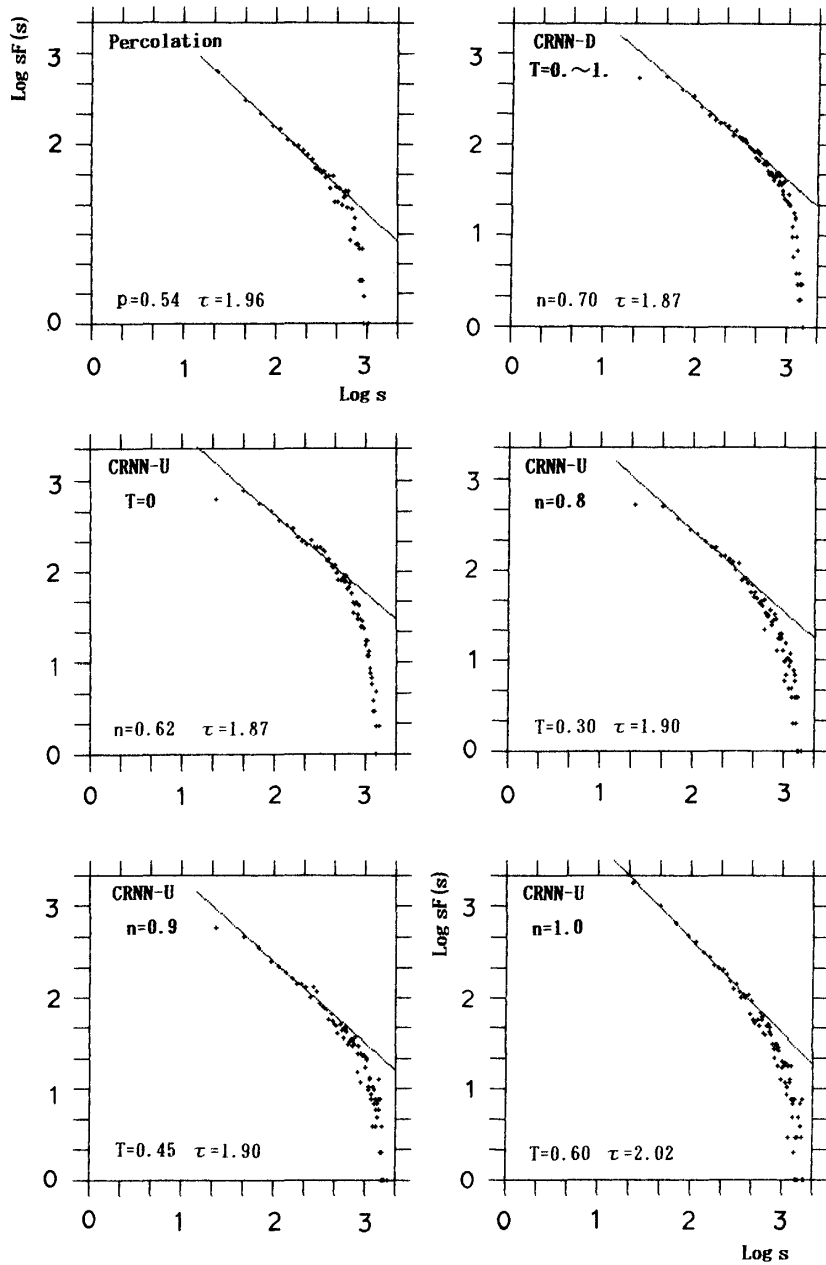


図6 臨界点におけるクラスターサイズの分布関数 $F(s)$ を両対数グラフで示す。直線は臨界指数 τ を与える。

起きることを示した。経験的な手法を用いて、臨界密度 n_c あるいは臨界発火しきい値 T_c を決め、さらに臨界指数とフラクタル次元 γ 、 D_f 、 τ を決定した。それらの結果を表1にまとめて示す。我々はこの一覧表から、どのタイプのCRNネットに対しても、臨界指数がよい一定値を与えることがわかる。どうやらCRNネットは図3（相図）の境界線上のすべてにおいて共通の臨界指数を持ち、それはまた結合係数 k_j の分布関数にも依存しないらしい。言葉をかえると、我々のCRNネットにおける臨界性（criticality）はユニークであり、単一の普遍的なクラス（universality class）に属する。そしてたぶんそのクラスはパーコレーション転移のそれと同一であろう。

CRNネットの上で励起クラスターを作る規則は、パーコレーションクラスターを作る規則に比べればはるかに複雑である。にもかかわらず、臨界点における両者の振る舞い（臨界指数で見た）は区別できない。そもそも臨界性というものは自然界の法則の中でもとくに普遍的なものであって、個々のモデルの詳細にはよらないという物理学の教えがある。それは空間次元とか相互作用の極めて一般的な性質にのみ依存する。CRNネットの場合も、ネットに「火」が広がる具体的なプロセスなど、臨界性にとってはどうでもよいのであろう。さらに想像すると、ネットの格子の種類にもよらないのであろう（パーコレーションの場合はこの点は真である）。しかしながら、我々が経験的に得た臨界指数はその精度に限界があり、さらに精密な指数の決定のためには、有限サイズスケーリング理論^{3)~6)}に基づく解析が必要である。これと関連して、最後に二つの予測を述べる。1) 臨界点においては励起クラスターが確立されるまでに要する時間 I (transient time) の平均が発散する（いわゆるcritical slowing downにあたる）。2) 時間 I の分布はべき関数となる。その指数からいわゆる $1/f$ ゆらぎが導かれるであろう¹⁾。これらは今後の課題である。

Type	Fixed	p_c, n_c, T_c	γ	D_f	$\tau(=1+2/D_f)$
Perco.	—	$p_c = .59 \sim .60$ (0.5928...)	1.8 ± 0.2 (2.389...)	1.87 ± 0.02 (1.896...)	1.95 (2.055...)
CRNN	$T=0.$	$n_c = .67 \sim .68$	1.8 ± 0.1	1.88 ± 0.02	1.87
Type-U	$n=0.7$	$T_c = .04 \sim .05$	1.8 ± 0.1	1.89 ± 0.02	1.90
	$n=0.8$	$T_c = .20 \sim .21$	1.8 ± 0.1	1.89 ± 0.02	1.90
	$n=0.9$	$T_c = .37 \sim .38$	1.8 ± 0.1	1.89 ± 0.02	1.95
	$n=1.$	$T_c = .53 \sim .54$	1.8 ± 0.1	1.89 ± 0.02	2.02
CRNN	$T=0. \sim 1.$	$n_c = .74 \sim .75$	1.8 ± 0.1	1.88 ± 0.02	1.86
Type-D					

表 1 臨界密度 p_c と n_c 、臨界しきい値 T_c 、そして臨界指数とフラクタル次元 γ 、 D_f 、 τ 。括弧内の数字は無
限サイズの系における厳密な値を示す。

謝辞

この研究は東京都立大学の岡部豊教授との共同によるものである。成果の一部はすでに英文で印刷公表されている⁷⁾が、いまだにやり残した宿題の部分の方が多い。そこでこの紀要の場を借りて問題点をもう一度整理して見た。

(1997年7月10日受理)

参考文献

- 1) P.Bak, C.Tang and K.Wiesenfeld:Phys.Rev.A38,1988,pp.364.
- 2) K.Satoh:J.Phys.Soc.Jpn.58,1989,pp.2741.
- 3) D.Stauffer: Introduction to Percolation Theory, 1985(Taylor & Francis, London & Philadelphia).
- 4) T.Vicsek: Fractal Growth Phenomena,1989 (World Scientific, Singapore)Chap.5.
- 5) K.Binder and D.W.Heermann: Monte Carlo Simulation in Statistical Physics,1988(Springer-Verlag, Berlin).
- 6) J.Feder:Fractals,1988(Plenym, New York).
- 7) K.Satoh and Y.Okabe:J.Phys.Soc.Jpn.62,1993,pp.64.