重複世代モデルにおける引退年齢

木立　力※

1．はじめに

国民の平均年齢の上昇や、65歳以上人口比率の上昇は人口高齢化とよばれる。人口高齢化は、経済の総需要と総供給の双方に大きな影響を及ぼしている。医療、介護、年金などは、総生産物に占める特定の財・サービスへの需要量が増大するという需要面の問題である。他方、人口高齢化による労働供給の減少などは、経済の総生産物の減少という供給面の問題と言える。このように需給両面の課題がありながら、人口高齢化に関する経済政策で話題になるのは需要面の問題がほとんどであり、経済の生産力への影響は把握しづらいためか、供給面の問題が対象となることはまれである。

しかも、高齢化の過程が本来長期的であるにもかかわらず、経済政策は短期的成果で評価されがちである。需要面の課題にかぎっても、医療・年金保険料引き上げによる可処分所得低下や消費需要低下など、景気循環の視野から論じられ、長期的需要構造の視野から論じられることは少ない。供給面についても、年金支給開始年齢引き上げとともに予想される引退時期前後の年齢層の雇用問題など、政策上注目されるのは比較的短期の問題である。

高齢化による供給面の長期的影響が重視されない原因の一つは、上述のように政策担当者及びそれを支持する人々の短期的利害のためであり、この傾向自体が経済学が克服すべき対象であることは言うまでもない。また、主に経済分析技術のせいで、マクロ経済の供給面の分析が大学院教育でしか扱われず、とくに日本では政策担当者の多くが習熟していない現状も原因の一つと言える。しかし、このような傾向とは逆に、経済成長論リバイバルと言われる1980年代以降のテキスト（Blanchard and Fischer(1989)）で強調されるように、深刻な経済問題はむしろ長期の供給の問題である。人口高齢化もまた長期の供給問題としての対応の巧拙がより重要な政策課題と思われるのである。

人口高齢化を長期の視野で論じるという要請に応えうるモデルの一つは、重複世代モデルである。Diamond(1965)タイプの重複世代モデルでは、各世代は有限な生涯期間のうちで前半にだけ労働を供給し賃金を得て、消費した残りを貯蓄する。後半は引退し若年期の貯蓄残高を引き出して消費を行う。生年の異なる各世代が各時点で共存する経済が想定される。重複世代モデルにおいて人口高齢化は、第１に人口成長率が高い経済から人口成長率が低い経済への移行期と見ることができる。第２には平均寿命が長くなるか、生涯における引退期の比率が長くなることと把握できる。よって重複世代モデルにおける人口高齢

※青森公立大学

化の分析としては、次の方向が考えられる。①人口成長率が高い定常状態から人口成長率が低い定常状態への移行期を分析する。この場合には定性的分析が難しいため、式に具体的数値を代入してシミュレーション分析を行う場合が多い。②他の条件を一定として、人口成長率が高い経済と人口成長率が低い経済の状態を比較する。③各世代において生涯に占める引退期間の比率が高まることによる経済への影響を分析する。①については、Auerbach and Kotlikoff(1983)が税制変化についてシミュレーション分析を行い、Kidachi and Tachibanaki(1985)が、そのモデルを最初に人口成長率が低下する移行期の分析に適用している。②については、Samuelson(1975)、Deadorff(1976)が最初に分析を行い、効用関数と生産関数をコブ・ダグラス型に特定した場合に、効用を最小にするような人口成長率があるという結論を導いている。その後Michel and Pestieau(1993)では効用関数と生産関数をCES型に一般化した分析を行い、効用を最大にする人口成長率が存在するパラメータの条件を導出している。このように人口に関連する経済の成果が、効用関数や生産関数の代替弾力性の大きさによって一変することは本稿との関連で注目される。

本稿は、人口高齢化による長期の供給面の問題のうち、未だ取り上げられることがなかった③の側面、すなわち生涯期間に占める引退期間の長期化が重複世代経済に及ぼす影響を明らかにする試みである。

2．問題の所在

Diamondタイプのモデルでは、本源的生産要素を労働と資本の２つに大別している。労働を供給するのは生涯の前半だけであるが、消費は生涯を通じて行うので、後半生の消費に備えて前半生の賃金所得の一部を貯蓄する。これはライフサイクル貯蓄と呼ばれる。毎期のフローの貯蓄は実物投資の資金となる。ライフサイクル貯蓄の残高は引退前後の年齢で最大となる。１時点の経済ではさまざまな年齢さまざまな人口の各世代が共存する。各世代のライフサイクル貯蓄の残高を、共存する世代の人口ウェイトで加重和をとったものは、経済全体の投資の残高でもあるから資本ストックとなっている。

このモデルにおいて、生涯期間を一定として、後半の引退期間のシェアが高まった場合に、経済に何が起こるであろうか。経済の総生産物あるいは要素価格を一定として考えるならば、賃金を得る期間のシェアが短くなれば、年当たりの平均消費額が小さくなることは自明である。しかし、Diamondタイプの重複世代モデルでは、引退期間が長くなれば、引退後消費に備えて貯蓄を多くする必要がある。すると、引退期間が長い場合の方が、結果的に高い資本労働比率となり、賃金水準が高くなるため、生涯効用が上昇する可能性があるのではないか。これが、本稿での問題意識である。

Diamondタイプの重複世代モデルを用いて、定性的な分析を行う際に、多くの場合は、就労期・引退期という２期間モデルで十分に一般性をもった結論が導出される。しかし本論文のように、就労期と引退期の長さの比率を分析対象とする場合には、その比率が変化するモデルを用いる方が直接的である。生涯期間を連続時間で表したモデルは、

Tobin(1967)[1] において最初に開発され、Summers(1981)等で用いられている。

3．基本モデル

本稿では、Tobinタイプの連続時間の重複世代モデルを用いる。定常状態（斉一成長径路）を分析対象とする。各世代の代表的個人は、次の生涯予算制約のもとに生涯効用を最大化する。

$$\text{Max} \quad \int_0^D u(c_s)e^{-\rho s}ds$$

Subject to (1)

$$\int_0^D c_s e^{-rs}ds = \int_0^{D\theta} w_s e^{-rs}ds$$

ここで、c_s、w_s は消費、賃金の流列、$u(c_s)$ は瞬時的効用、ρ は時間選好率とする。就労前の年少期は簡単化のため考慮しない。$s = 0$ は就労開始年齢であるが、以下では s を年齢、D を生涯期間、θ を生涯に占める就労期間の比率と呼ぶ。分析の見通しをよくするために、いくつかの単純化を行っている。瞬時的効用関数は、次のように対数型とする。この場合、生涯効用積分は対数を一定の割引率で積分したものなので、対数変換によって対数線形となる２期間コブ・ダグラス型を連続型にしたものとなる。したがって異時点間消費の代替の弾力性は一定で *1* である。よく用いられる異時点間消費の代替弾力性一定型効用関数における弾力性を *1* とおいた特殊型と見ることもできる。また、簡単化のため、所得余暇選好は考慮していない。

$$u(c_s) = \ln c_s \tag{2}$$

労働供給は毎期 *1* で固定され、通常想定されるハロッド中立的な技術進歩率を入れない。また、定常状態であるから毎期の賃金率は一定である。これらによって、賃金流列は次の式となる。

$$w_s = w \tag{3}$$

ここで、w は賃金率である。

以上の３つの式から、生涯効用最大化の結果として得られる消費流列は次式となる。

---

1) 学術雑誌掲載ではなく著書の中の一篇として発表されたためか、重要性にふさわしい引用がなされない論文ではないかと思う。

$$
\begin{aligned}
c_s &= c_0 e^{(r-\rho)s} \\
c_0 &= \left[w(\frac{e^{-rD\theta}-1}{-r}) \right] \Big/ \left[\frac{e^{-D\rho}-1}{-\rho} \right]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

マクロ生産関数は完全分配となる一次同次とし、コブ・ダグラス型とする。

$$
y = k^a \tag{5}
$$

ここで y は（労働者）一人当たり生産量、k は資本労働比率、a は資本分配率である。これによって、賃金率と利子率は次の式となる。

$$
\begin{aligned}
w &= (1-a)k^a \\
r &= ak^{a-1}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

各人は 0 歳から $D\theta$ 歳まで労働すると同時に消費する。0 歳から s 歳までの賃金合計の割引現在価値と消費合計の割引現在価値の差は貯蓄残高の割引現在価値（0 時点価値）である。この貯蓄残高の割引現在価値を s 時点価値に直したものは、s 歳における貯蓄残高である。$D\theta$ から D までも同様に考えると、s 歳での貯蓄残高の径路は次式で表される。

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq s < D\theta \\
& A_s = e^{rs}(w\frac{e^{-rs}-1}{-r} - c_0\frac{e^{-\rho s}-1}{-\rho}) \\
& D\theta \leq s < D \\
& A_s = e^{rs}(w\frac{e^{-D\theta s}-1}{-r} - c_0\frac{e^{-\rho s}-1}{-\rho})
\end{aligned}
\tag{7}
$$

遺産も相続もない純粋なライフサイクル貯蓄を想定しているので貯蓄残高の径路 A_s は初期にゼロ、引退時期 $D\theta$ の前後で最大、死亡時期 D でゼロのような山型となる。

次に各世代の大きさであるが、ゼロ時点で就労開始の世代の人口を 1 とする。労働供給量も 1 としていた。世代の成長率を n とする。まえに技術進歩率を 0 としたが、ハロッド中立的技術進歩率は効率単位での労働数の増加を意味するので、世代の成長率 n は世代人口の成長率とハロッド中立的な技術進歩率の和を意味するものとして定義する。定常状態の分析においては世代間の相対比率である世代成長率と人口成長率は同一となる。時点と年齢の区別を厳格に行うことにしよう。0 時点で 0 歳の世代人口は 1 である。同じ 0 時点で共存する s 歳の世代は s 年前に出生した世代であるから e^{-ns} 倍の世代人口である。どの世代も全時点で労働供給量が 1 であるから、0 時点での集計労働量は次式である。

$$L_0 = \int_0^{D\theta} e^{-ns} ds \tag{8}$$

(7)式で示された貯蓄残高はs歳の値であり、0時点においてs歳の世代人口はe^{-ns}であることから、0時点における全世代の貯蓄残高の集計量（貯蓄残高を世代人口をウェイトとして積分したもの）は次式で表されることがわかる。

$$\int_0^{D} e^{-ns} A_s ds \tag{9}$$

Diamond タイプの重複世代モデルの基本的な想定は(9)式の集計資産が物的な集計資本になっていることであるから、(9)式はゼロ時点の集計資本K_0に等しい。したがって次の式が均衡において成立しなければならない。

$$k = \frac{\int_0^{D} e^{-ns} A_s ds}{L_0} \tag{10}$$

パラメータ以外の経済の内生変数だけを考えると、w、rという要素価格は資本労働比率kの関数であり、(10)式右辺に含まれる(7)式の貯蓄残高径路もw、rの関数、すなわちkの関数であるから、(9)式の集計値もkの関数である。よって(10)式は1つの未知数kの非線形方程式である。経済学的意味としては、式を満たすkにおいて、フローとストック両面で（式の上では(10)式のストックの市場で）貯蓄・投資が均衡するように(6)式で要素価格が調整されていることになる。

4．引退年齢の変化

生涯期間に占める就労期のシェアθが変化すると、(10)式における資本労働比率kの均衡解が変化する。(10)式を$k = f(k, \theta)$と見て、全微分することによって、θの変化によるkの一次導関数を陽表的に求めることはできるが、導関数もkとθの関数のままであって、他の選好パラメータだけによって、符号を定性的に分類することはできない。[2)]そこで、他のパラメータを所与として、生涯に占める就労期間の比率θにさまざまな値を与えたときの均衡の資本労働比率kを数値的に求め、(1)式で表される生涯効用の違いを評価することにした。所与としたパラメータは、世代成長率（定常状態では人口成長率であり、本稿では暗黙にハロッド中立的技術進歩率を含む）nが3%、生涯期間Dが60年（20歳から80歳までの就労期と引退期を想定している）、資本分配率が30%、時間選好率が1%とする。この値のもとで生涯に占める就労期間の比率θを変化させた結果得られた数値を図1に示した。

---

2) さまざまな簡単化の仮定をおくことで、(10)式を$k=g(\theta)$の形に表そうとしたが、解釈可能な展開ができなかった。

図中の一つの曲線は各θを与えた場合の消費から得られる生涯効用の積分値である。[3] θが0.3未満においても値は計算しているが、見やすいスケールとするためにθ=0.3～1.0までを示した。θ=1、すなわち引退期間が0の場合にも、賃金流列と消費流列の形状が異なるかぎりライフサイクル貯蓄は発生し、資本形成も行われる。

もう一つの曲線は利子率を%の大きさで示している。(5)式の生産関数は収穫逓減（二次微分が負）であるから(6)式の利子率は資本労働比率が大きいほど小さい。図では判読しづらいが、利子率は単調に増加し、θが約0.49で3%である。つまりθ=0.49で、人口成長率＋ハロッド中立的技術進歩率＝利子率となり、資本労働比率は黄金律の水準であることがわかる。

重複世代モデルが持つ、理論的にも政策的にも重要な性質の一つは、厚生経済学の第一基本定理が満たされないことである。経済主体にとっては所与であるθが、たまたまある値の場合だけ、最適な資本労働比率をもたらす。これより小さいθでは資本は過大であり、動学的に非効率と呼ばれる状態である。これより大きいθでは資本は過小であり、動学的に効率的である。次の数値例で反例を挙げるが、θが0から1までの間で黄金律を達成するθが存在するとは限らない。

図１のパラメータの場合には、資本労働比率はθとともに単調減少する。それは次のように解釈される。θすなわち生涯期間に占める就労期間の比率が増加すると、重複世代経済における総労働供給は増加する。θが大きいと資本水準も労働も大きいが、引退後消費の比重が小さくて済むため、生涯賃金におけるライフサイクル貯蓄の割合は低下し、労働に比べ資本が相対的に小さくなる。しかし、図1の場合には、θが大きいことによって、生涯効用を低下させるほど資本労働比率が低下するという逆説的なことは生じていない。

それでは、どのような場合にそうした可能性があるだろうか。θが中くらいの値で黄金律が達成される図１の場合と異なり、θが小さくても黄金律には達せず、θが大きいほど黄金律から著しく乖離するケースでは、θが大な場合に効用が小さくなる可能性があるのではないか。それではθの全域で資本労働比率が黄金律を下回るのはどのような場合だろうか。時間選好率は将来消費を低く評価する率であるから、ρが大であれば将来消費を低く評価するため、現在消費を多く行い貯蓄は少なく、資本は少なくなる。

図2は、時間選好率ρが大きい場合の効用積分値の曲線と利子率の曲線を示している。図では判読しづらいが、θ=0.78をピークとして効用積分値は低下し、θ=0.92から再び上昇するという複雑な変化をみせている。θが0.9を超えた辺りで曲線は不連続のようにも見えるが、0.01刻みで計算結果を図示したために、そのように見えるだけである。もう一つの曲線である利子率を見ると、θの全域で黄金律の3%を上回っている。とくに効用が低いθ=0.92の辺りで利子率は急速に上昇し、資本労働比率がこの辺りで急速に減少していることがわかる。この影響で生涯効用が低下しているのである。

時間選好率ρが6%あたりまでは、このような逆説的現象は生じない。ある程度以上に

3) 瞬時的効用関数が対数なので、自然対数よりも消費額が小さいならば負の値をとりうる。効用指標としての大小の順序だけが意味を持っている.

時間選好率が高く、θ の全域で資本労働比率が小さいような選好パラメータの場合に、θ の増加が効用低下を招きうる例を示すことができた。

5．引退年齢の変化と黄金律の効用

前の節で例証された逆説的現象の意味を明確にするために、本節では各 θ における黄金律の効用積分値を計算することとする。Ihori (1996)、de la Croix and P. Michel(2002)で紹介されているように、本稿のような所得余暇選好を考慮しない重複世代モデルにおいて黄金律を達成するための政策は、一括固定移転の問題であり、1970年代に多くの論文が発表された。それによれば同時点で就労世代から引退世代へ移転する政策（賦課方式年金がこれにあたる）を行うと資本労働比率は低下するので、資本が過大な場合には、黄金律に近づき、効用は増加する。逆に負の移転政策（高齢者に課税して就労者に移転する）[4)]を行うと、資本労働比率は上昇するので、資本が不足な場合には黄金律に近づき、効用は増加する.

就労者の賃金の t 倍の課税をし、その全額を引退者一人あたり τ だけ給付すると、政府の均衡予算から t と τ は次式の関係となる。

$$\tau = tw\left(\int_0^D e^{-ns}ds\right)/\left(\int_{D\theta}^D e^{-ns}ds\right) \tag{11}$$

これにより、生涯予算制約は(1)式に替わって(12)式となる。

$$(1-t)w\int_0^{D\theta} e^{-rs}ds+\tau\int_{D\theta}^D e^{-rs}ds = c_0\int_0^D e^{-rs}e^{(r-\rho)s}ds \tag{12}$$

効用最大化の結果得られる消費の初期値は次式となる。

$$c_0 = \left[(1-t)w\left(\frac{e^{-rD\theta}-1}{-r}\right)+\tau\left(\frac{e^{-rD}-e^{-rD\theta}}{-r}\right)\right]/\left(\frac{e^{-D\rho}-1}{-\rho}\right) \tag{13}$$

以上から、s 歳の貯蓄残高は(7)式に替わって次式となる。

$$\begin{aligned}
&0 \le s < D\theta \\
&A_s = e^{rs}\left((1-t)w\frac{e^{-rs}-1}{-r}-c_0\frac{e^{-\rho s}-1}{-\rho}\right) \\
&D\theta \le s < D \\
&A_s = e^{rs}\left((1-t)w\frac{e^{-D\theta r}-1}{-r}+\tau\frac{-e^{-rs}+e^{-rD\theta}}{r}-c_0\frac{e^{-\rho s}-1}{-\rho}\right)
\end{aligned} \tag{14}$$

---

4) 直接対応するような現実の政策は、賦課方式年金の場合のように好い例がない。

(8)、(9)、(10)式と同様の集計を行って、均衡の資本労働比率が求められる。移転率 t が大きいと、資本労働比率 k は単調に小さくなる。資本労働比率 k が黄金律すなわち $n = ak^{a-1}$ を満たすような t の値を求めることができる。こうした最適な移転政策実施後では、所与の θ において生涯効用積分値は最大となっている。移転政策によって最大化された生涯効用が θ のどのような関数となっているかが、本節の関心事である。

図3では、図1に対応するパラメータにおいて、最適な移転政策を行った場合の生涯効用の曲線と最適な t %の曲線を示している。図1では θ =0.49ではたまたま黄金律であったから、θ がそれよりも小さい（大きい）場合には $t > 0$（$t < 0$）の移転政策が最適であるという理論と一致する結果が図から確認できる。移転前効用の曲線は黄金律効用の曲線に θ = 0.49において接している。図1、図3のパラメータでは θ と生涯効用の関係は単調増加のままである。[5)]

図4は図2と対応するパラメータの場合において、最適な移転政策を行った後の黄金律の効用積分値の曲線と t %の曲線を示している。黄金律では、資本の限界生産性は n に等しいから、どの θ においても、θ に応じてきまる最適政策 $t(\theta)$ によって、資本労働比率は同じ値に調整されている。したがって引退期間が短かくてライフサイクル貯蓄が少ないために資本が過小になる問題は移転政策によって排除されている。このため、生涯効用は、ρ の値がたとえ大きくても、θ とともに単調増加する。

以上から前節の図2に示した現象は、資本労働比率が黄金律から著しく乖離することによって生じることが明らかにされた。

6．結びと今後の課題

本稿では生涯に占める就労期間の長期化（引退期間の短期化）の一般均衡的意味を重複世代モデルにおいて検討した。主な結論は２点である。第１に、就労期間が長期化すると引退後消費に備えた貯蓄割合が低下するため、資本労働比率は低下する。時間選好率が大きく貯蓄割合が十分に小さいケースでは、引退期間の短期化によって資本労働比率が著しく低下するため、生涯消費からの生涯効用が低下するという逆説的現象が起こる。第２に、所与の就労期間比率に対応して、黄金律を達成するための最適移転政策を行った場合には、時間選好率によらず、就労期間比率の増大によって、生涯消費から得られる生涯効用は単調増加する。したがって、生涯効用が低下する現象は黄金律からの乖離（重複世代モデルにおける市場の失敗）によって生じる。

最後に留意点と課題を挙げる。（１）Diamondタイプの重複世代モデルは1財モデルである。よって本源的生産要素は労働だけであって、資本はそれを蓄積したものにすぎない。したがって、就労期間の増加は本源的生産要素である労働賦存量を増加させているので、

---

5) θ =1では引退後期間がゼロになるから、(11)式は定義できない。しかし、θ =1に近いとき数値計算では τ がかなり大きい値をとる一方で、期間も同時にゼロに近づくので、両者の積である引退後給付総額が、発散しない値として計算される。θ =1における移転政策について理論的検討が残されている。

消費可能量が増加するのは自明のはずである。しかも、標準的な経済理論で仮定されるように労働の不効用を効用関数に含んでいない。このような強い条件の下でさえも、就労期間の長期化が効用低下を招く可能性を指摘できた意義は大きいと考えられる。（2）図2で挙げた逆説的現象で想定した時間選好率の値は実証結果に鑑みて大きい値である。本稿では生産関数、効用関数をかなり簡略化しているため、貯蓄率が少ないケースは時間選好率の強さだけによって発生した。より一般性が高い関数においては、現実経済で起こりうるパラメータの範囲で、本稿の逆説的現象が発生するかもしれない。これは今後の課題である。

(2003年12月24日受付、2003年12月24日受理)

図1　移転前効用と利子率(n=0.03, ρ=0.01)

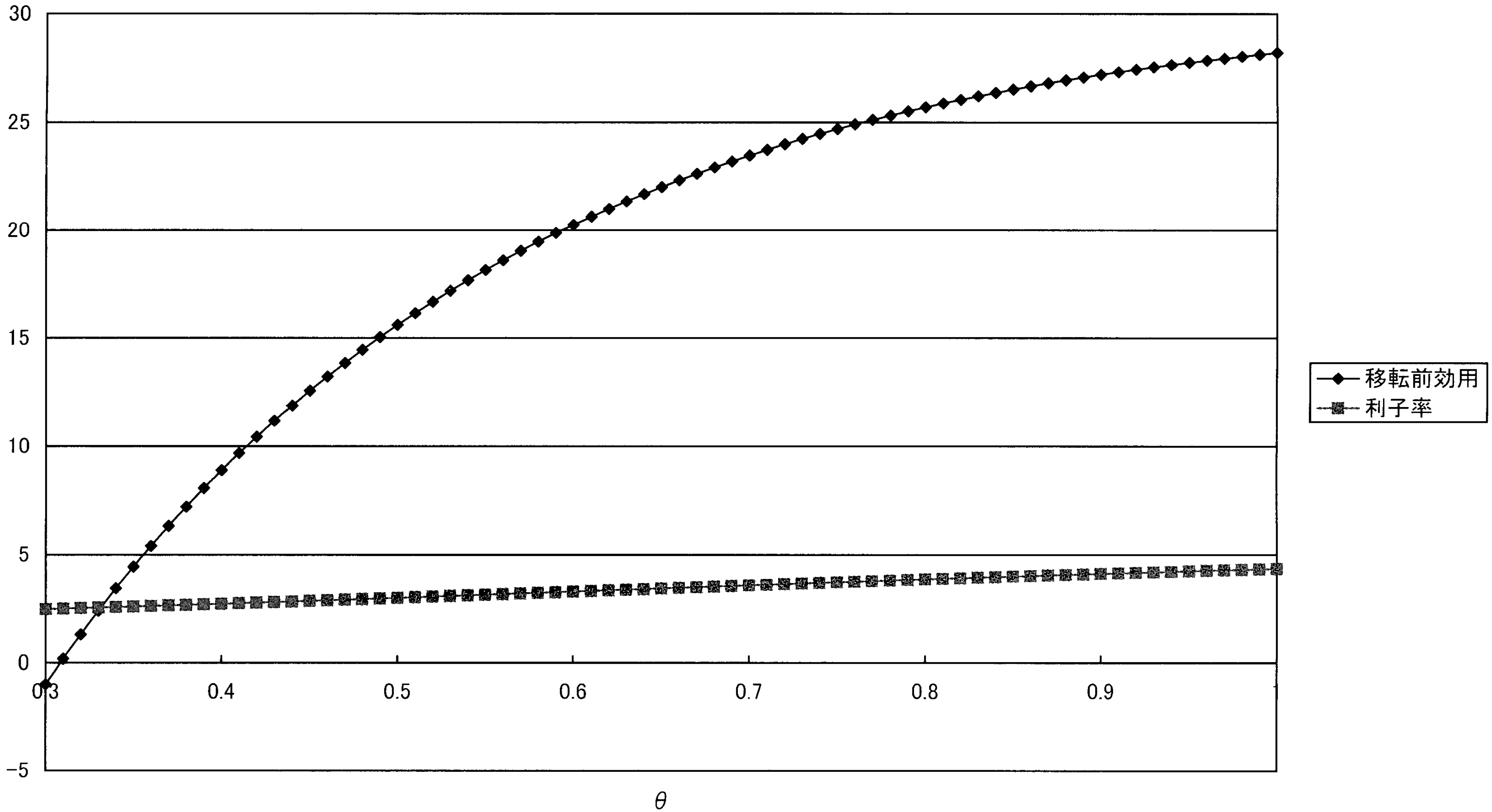


図2　移転前効用と利子率(n=0.03, ρ=0.07)

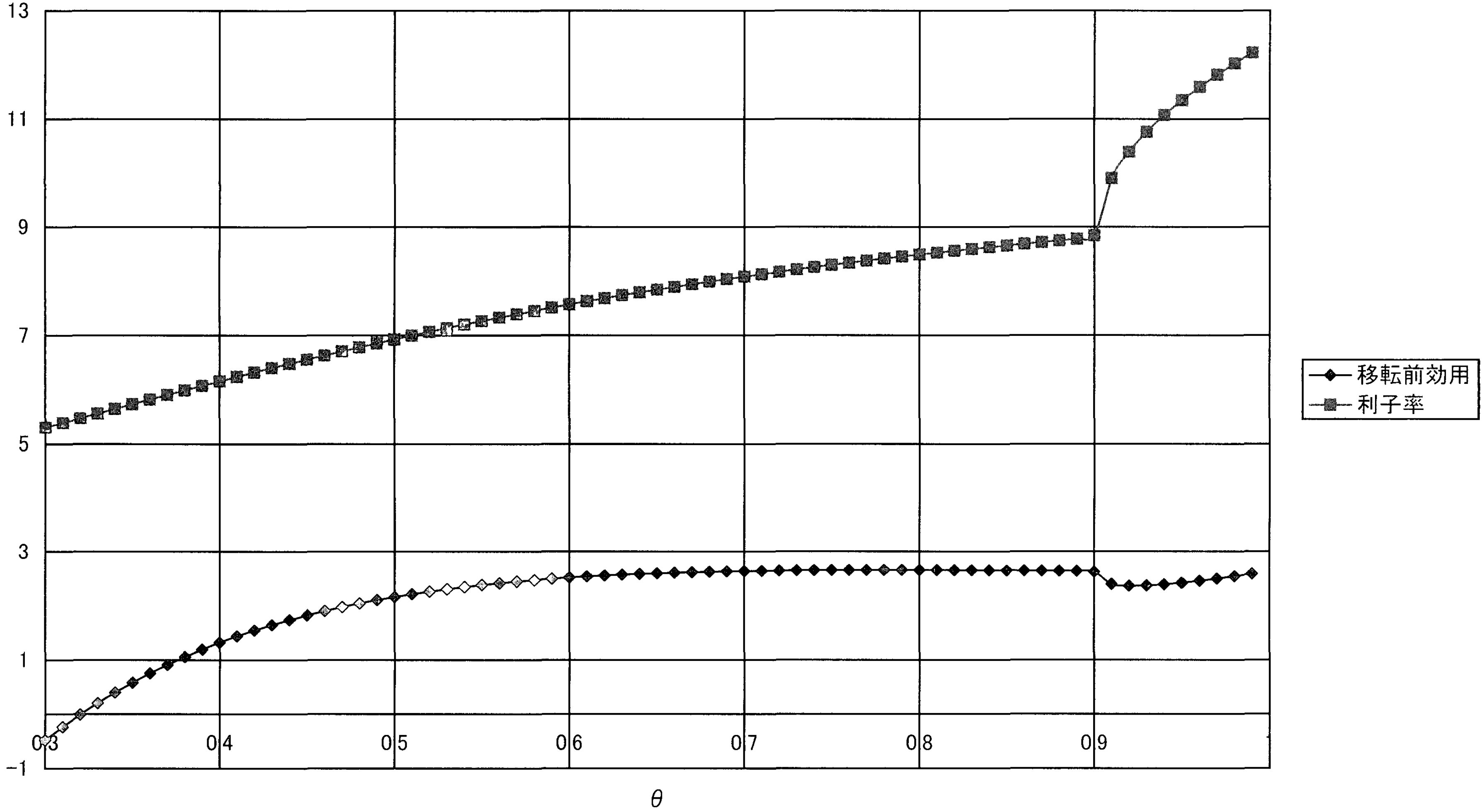


図3 効用比較と移転率(n=0.03, ρ=0.01)

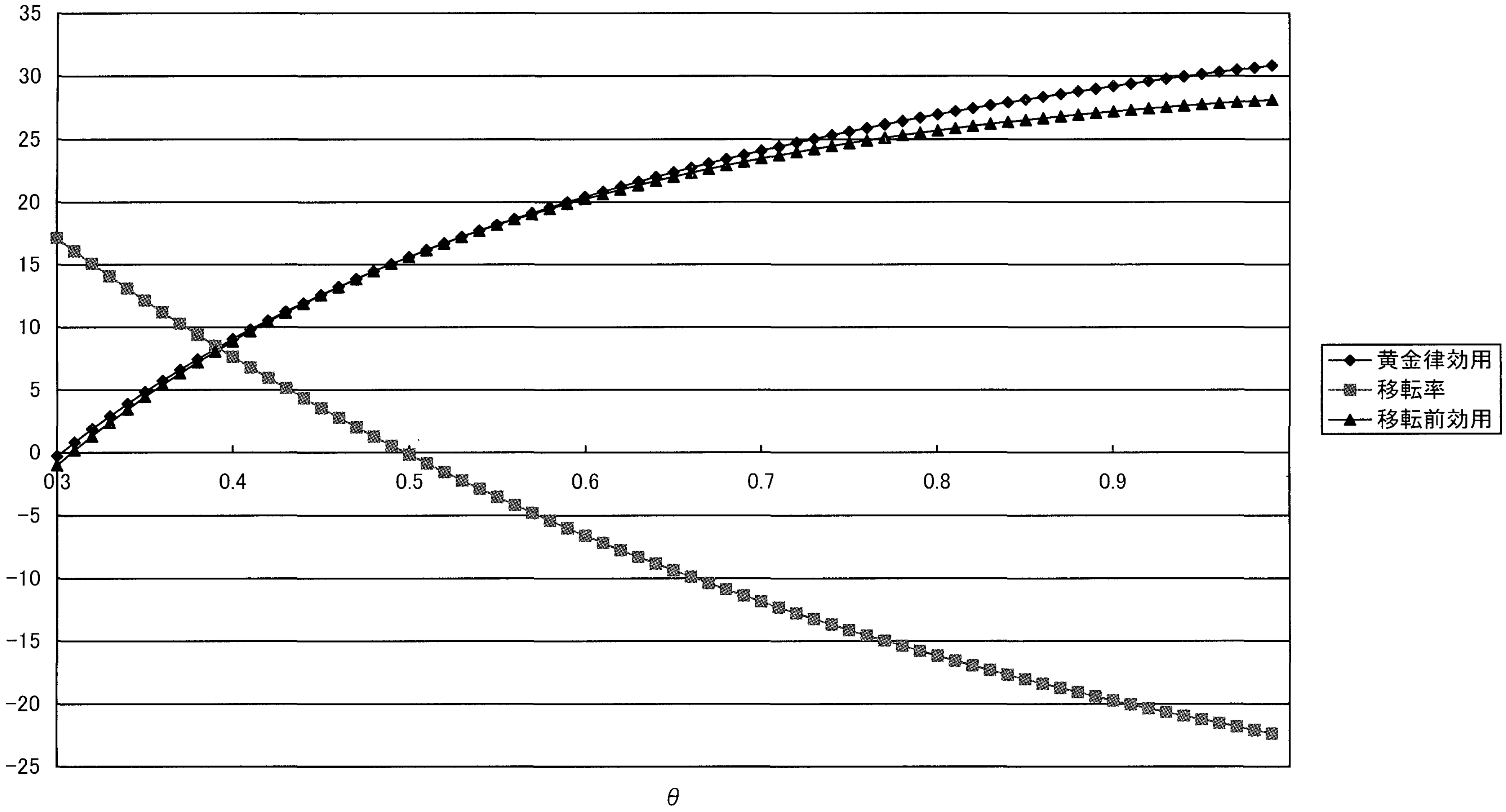
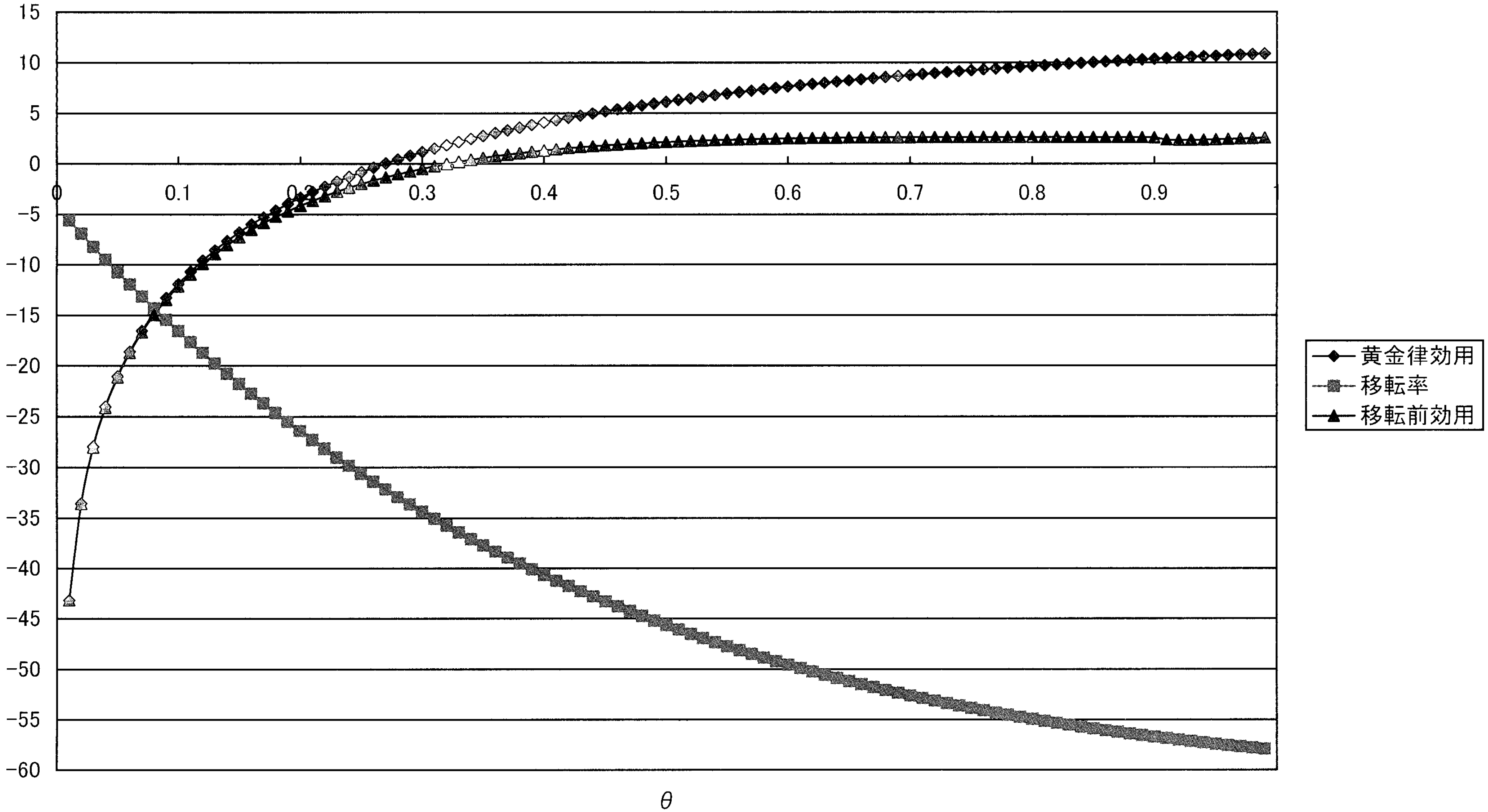


図4　移転前効用と黄金律効用(n=0.03, ρ =0.07)



参考文献

Auerbach,A.J. and L.J.Kotlikoff. (1983),"National savings,economic welfare, and the structure of taxation." in Feldstein,M.ed., *Behavioral Simulation Methods in Tax Policy Analysis*, University of Chicago Press.

Blanchard,O.J. and S.Fischer. (1989), *Lectures on Macroeconomics*. M.I.T. press.

De la Croix and P.Michel.(2002), *A Theory of Economic Growth*. Cambridge University Press.

Deardorff,A.(1976). "The optimum growth rate of population: Comment." *International Economic Review,* Vol.17(2),pp510-515.

Diamond,P. (1965), "National debt in a neoclassical growth model," *American Economic Review*,Vol.55, pp1126-50.

Ihori,T.(1996), *Public Finance in an Overlapping Generations Economy*. Macmillan.

Kidachi,T and T.Tachibanaki.(1985), "Taxation and savings :Transition analysis." Papers presented at the Fifth World Congress of Econometric Society held at M.I.T.

Michel,P. and P.Pestieau.(1993), "Population growth and optimality: When does serendipity hold?" *Journal of Population Economics*,Vol.6(4),pp353-362.

Samuelson,P. (1975), "The Optimum Growth Rate of Population." *International Economic Review,* Vol.17(2),pp510-515.

Summers,L.H. (1981), "Capital Taxation and Accumulation in a Life Cycle Growth Model." *American Economic Review*,Vol.71,pp533-544.

Tobin,J. (1967), "Life cycle saving and balanced growth." in William Feller,ed., *Ten Economic Studies in the Tradition of Irving Fisher*. New York.

Abstract

In this paper, I examine the general equilibrium effects of early retirement in a Tobin-type continuous overlapping generations model. I show that when the rate of time preference is sufficiently high, early retirement can raise the life-time utility of life-time consumption. If optimal intergenerational lump-sum transfer policies are introduced, early retirement reduces life-time utility, irrespective of the rate of time preference. People can be worse off by retiring late because the capital labor ratio declines far below the golden rule capital labor ratio.