青森公立大学論纂
第2巻第2号(2017)

撹乱項がStudentの t 分布に従う GARCH(1,1)モデルの同時ベイズ推定

七宮　圭※

要　旨

本論文では、単純な仮定をおいた撹乱項がStudentの t 分布に従うGARCH (1,1) モデルに対する新しいベイズ推定手法について考察する。本論文で扱う手法では、既存の一般的な方法と異なり、acceptance-rejection Metropolis-Hastingsアルゴリズムを用いてモデルの全てのパラメータを同時に生成する。また、この手法を正当化するために、本論文ではこの手法の中で使用する提案密度関数が多変量正規分布で近似できることを証明する。

1 はじめに

株価や為替などの資産価格の時系列データを分析する際には、ボラティリティと呼ばれる二次モーメントの変動に着目してモデル化することが多い。その中でもパラメトリックなモデルとしては主に、Engle(1982)によって提案されたARCH(Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)モデルやBollerslev(1986)によって過去のボラティリティの値もモデルに含める形で一般化させたGARCH (generalized ARCH)モデルとその派生モデルからなるARCH型モデルと、ボラティリティの変動を確率的なものとして表記したSV(Stochastic Volatility)モデルとその派生モデルからなるSV型モデルの二種類があり、これらのモデルが広く用いられている。このようなモデルを推定する場合には、渡部 (2000、2005) や三井・渡部 (2003)、三井 (2014) などにあるように、尤度関数を用いた標本理論による推定だけではなく、ベイズ推定法による分析も用いられることがある。

このようなGARCH モデルのベイズ推定法は、Nakatsuma(2000)やVrontos et al.(2000)などにより研究されており、最近のサーベイ論文としてはViribickaite et al.(2015)がある。これらのベイズ推定法においては、推定に用いるサンプリングというパラメータの値を確率密度関数から生成する方法としてモデルの設定によっては事後分布から直接パラメータを発生させることが困難な場合があることから、マルコフ連鎖モンテカルロ(Markov chain Monte Carlo、MCMC)法を利用した多種多様なアルゴリズムが提案されている。特に近年においては、本論文でも使用するacceptance-rejection Metropolis-Hastings (ARMH)アルゴリズムが用いられることが多い。また、ベイズ推定ではモデルの構造が複雑な場合は、全てのパラメータを同時に発生させるのではなく、いくつかの発生させやすいグループに分けて、お互いを条件として与えた上で交互に発生させるという手順を繰り返すことでサンプリングを行い、それらのサンプリングされたものを利用して推定を行っている。しかしながら、このようなベイズ推定のアルゴリズムを作成する場合には主に次のような問題に直面する。まず、それぞれのグループごとにベイズ推定の際に使用する分布が理論的に確率分布として近似できるという正当性の問題である。また、分割してグループごとに交互に発生させていることから生じるパラメータの発生の順番という問題もある。

※ 青森公立大学講師

その他には、実際にサンプリングしたときのパラメータの系列の相関問題から生じるサンプリング生成の効率性の問題も存在する。

一方で、株価などのボラティリティの実証研究においては、正規分布よりも裾の厚い分布が用いられることがある。このような場合、GARCHモデルやSVモデルの撹乱項に一般には t 分布と呼ばれるStudentの t 分布を考え、分散を１に標準化することで、標準正規分布よりも分布の中心よりも離れた値が出やすい裾の厚い分布に従うモデルを作ることができる。t 分布に従うGARCH（GARCH-t）モデルのベイズ推定法を研究したものとしては主に、三井・渡部（2003）による実証研究、既存のアルゴリズムの比較を行ったAsai（2006）、フリーの統計解析ソフトの R のパッケージの解説としてArdia and Hoogerheide（2010）などがあり、最近では分布の非対称性を考慮した多変量モデルへの拡張を行ったAsai（2015）などがある。これらの研究で用いられるアルゴリズムにおいては、上で既に述べたように、全てのパラメータを同時に発生させるのではなく、いくつかの発生させやすいグループに分けてお互いに条件として与えたうえで交互に発生させるという手順を繰り返すということを行っている。

これらの先行研究に対して、ARMHアルゴリズムを用いて全てのパラメータを同時にベイズ推定する方法については、伊藤智明氏の数値実験及び実証研究[1)]において既に用いられており、その提案された手法においては提案密度関数を多変量正規分布として扱っている。しかしながら、提案された手法で用いる提案密度関数が多変量正規分布で近似可能であるという理論的な証明は、既存の研究では発見できなかった。このようなことから、本論文では、伊藤氏が提案された手法の理論的な正当性を示すために、手法の中で用いられている提案密度関数が多変量正規分布で近似可能であるということを証明する。

次節以降の構成は以下のとおりである。2節では理論的準備として、本論文で使用するGARCH-t（1,1）モデルの設定と、そのモデルのパラメータをベイズ推定するために使用するARMHアルゴリズムを用いた推定方法について説明する。３節では、２節で説明したARMHアルゴリズムにおいてパラメータのサンプリングをする際に事後分布の代わりに用いられる提案密度関数を導出し、その提案密度関数が多重正規分布に近似できることを証明する。４節においては、結論と今後の課題を述べる。なお、３節における証明の一部は付録にて取り扱う。

2　GARCH-t（1,1）モデルとARMHアルゴリズム

2.1　GARCH-t（1,1）モデル

前節でも述べたように本論文で使用するGARCHモデルでは、撹乱項は標準正規分布ではなく、標準正規分布よりも裾の厚い t 分布を用いる。観測されたデータを $\{y_t\}_{t=1}^{T}$ と表記し、そのデータが以下のモデルGARCH-t（1,1）に従っていると考える。

$$y_t = \sigma_t \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} z_t \qquad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha y_{t-1}^2 \qquad (2)$$

このモデルのパラメータは $\theta = (\omega, \alpha, \beta, \nu)'$ の４つである。また、$\{z_t\}_{t=1}^{T}$ は自由度 ν に従う独立同一なt分布に従っており、その確率密度関数は

$$f_z(z_t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{z_t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad (3)$$

となる。ここで $\Gamma(x)$ はガンマ関数と呼ばれるもので、複素数 x の実部が正となる x に対して、つまり $\mathrm{Re}(x) > 0$ に対して

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

と定義される。なお、（1）における $\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$ の項は、$\nu > 2$ において $\mathrm{Var}(z_t) = \frac{\nu}{\nu-2}$ であることから、撹乱項の分散の大きさを１に標準化するために入っている。このことにより、撹乱項を $\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} z_t$ と考えれば、y_t の撹乱項が分散を１に標準化したt分布に従うことがわかる。

上記のモデルを推定する際には、初期値 σ_0^2 と y_0 の扱いが問題となる。一般的に初期値については、$\sigma_0^2 = y_0^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2$ として、

$$\sigma_1^2 = \omega + (\alpha+\beta)\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2 \tag{4}$$

と扱うことが多く、本論文においても同様に扱っている。なお、上記以外の初期値の設定をした場合、特に推定するパラメータに依存する形で初期値を定義した場合において、各パラメータに関する偏微分の式の形状が変わってしまうので、３節で議論する行列の形状が変わる可能性がある。

次に、本論文では各パラメータの事前分布として以下のような単純なものを設定する。

（２）の定数項にあたる ω については一様分布を仮定し、ハイパーパラメータを $\bar{\omega} > 0$ として、

$$f_\omega(\omega) = \bar{\omega}^{-1} I_{\{0<\omega<\bar{\omega}\}} \tag{5}$$

ここで $I_{\{\}}$ は $\{\}$ の中の条件を満たす時は１、それ以外の場合は０の値をとる指示関数である。

（２）の係数である (α, β) はGARCH(1,1)モデルの定常性の条件より、以下のような同時一様分布を仮定する。

$$f_{\alpha,\beta}(\alpha,\beta) = 2I_{\{\alpha\geq 0,\, \beta\geq 0,\, \alpha+\beta<1\}} \tag{6}$$

t分布の自由度 ν については、Asai(2006)と同様に切断指数分布を仮定する。このときハイパーパラメータを λ として、

$$f_\nu(\nu) = \begin{cases} \lambda\exp(\lambda(4-\nu)), & \nu > 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{7}$$

とする。

以上のGARCH-t(1,1)モデルと事前分布の設定を満たすために、パラメータ空間を Θ とおくと、各パラメータの値の範囲は以下のように仮定している。

$$\Theta = \{\theta = (\omega,\alpha,\beta,\nu)' | 0<\omega<\bar{\omega},\quad \alpha\geq 0,\quad \beta \geq 0,\quad \alpha+\beta<1,\quad \nu>4\} \tag{8}$$

以上の設定から、分析に使用する事後分布を導出する。まず、

$z_t = \sqrt{\frac{\nu}{(\nu-2)\sigma_t^2}} y_t$ から変数変換のヤコビアンは $\sqrt{\frac{\nu}{(\nu-2)\sigma_t^2}}$ となることと、$\{z_t\}_{t=1}^T$ の同時確率密度関数は（３）の積であることから、初期値を条件として与えられた尤度関数 $L(\{y_t\}_{t=1}^T, \theta|\sigma_0^2, y_0)$ は

$$\begin{aligned} L(\{y_t\}_{t=1}^T, \theta|\sigma_0^2, y_0) &= \prod_{t=1}^{T}\sqrt{\frac{\nu}{(\nu-2)\sigma_t^2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \\ &\quad \times\left(1+\frac{\nu}{(\nu-2)\sigma_t^2}\frac{y_t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \\ &= \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{(\nu-2)\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\right)^T \\ &\quad \times\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{\sqrt{\sigma_t^2}}\left(1+\frac{y_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \end{aligned}$$

となる。事後分布は尤度関数と各パラメータの事前分布の積であるので

$$\pi(\theta) \propto L(\{y\}_{t=1}^T, \theta|\sigma_0^2, y_0) f_\omega(\omega) f_{\alpha,\beta}(\alpha,\beta) f_\nu(\nu)$$

と近似できることから、尤度関数とそれぞれの事前分布を代入して、

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &\propto \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{(\nu-2)\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\right)^T \lambda\exp(\lambda(4-\nu)) \\ &\quad \times\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{\sqrt{\sigma_t^2}}\left(1+\frac{y_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \\ &\quad \times\bar{\omega}^{-1}I_{\{0<\omega<\bar{\omega}\}}2I_{\{\alpha\geq 0,\,\beta\geq 0,\,\alpha+\beta<1\}}I_{\{\nu>4\}} \end{aligned}$$

となる。この式を対数変換すると

$$\begin{aligned} \ln\pi(\theta) &\propto T\ln\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \frac{T}{2}\ln(\nu-2) - \frac{T}{2}\ln\pi \\ &\quad - T\ln\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) + \ln\lambda + \lambda(4-\nu) \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\sigma_t^2 - \frac{\nu+1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\left(1+\frac{y_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2}\right) + C \\ &= C + T\ln\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \frac{T}{2}\ln(\nu-2) \\ &\quad - T\ln\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \lambda\nu \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\sigma_t^2 - \frac{\nu+1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\left(1+\frac{y_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2}\right) \end{aligned}$$

ただし、ここではCを定数としておいている。一方で、

$$\ln\left(1+\frac{y_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2}\right) = \ln((\nu-2)\sigma_t^2 + y_t^2) - \ln(\nu-2) - \ln(\sigma_t^2) \tag{9}$$

と変形することが可能なので、

$$\begin{aligned} \ln\pi(\theta) &\propto C + T\ln\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \frac{T}{2}\ln(\nu-2) \\ &\quad - T\ln\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \lambda\nu - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\sigma_t^2 \\ &\quad - \frac{\nu+1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left\{\ln((\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2) - \ln(\nu-2) - \ln(\sigma_t^2)\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C + T\ln\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + \frac{T\nu}{2}\ln(\nu-2) \\
&\quad - T\ln\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \lambda\nu + \frac{\nu}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\sigma_t^2 \\
&\quad - \frac{\nu+1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln((\nu-2)\sigma_t^2 + y_t^2) \quad (10)
\end{aligned}
$$

以下では、上の式の右辺の定数項を除いた部分を $\ell(\theta)$ とおいて考察する。つまり、

$$
\begin{aligned}
\ell(\theta) \;:=\; & T\ln\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + \frac{T\nu}{2}\ln(\nu-2) \\
& - T\ln\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \lambda\nu + \frac{\nu}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\sigma_t^2 \\
& - \frac{\nu+1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln((\nu-2)\sigma_t^2 + y_t^2)
\end{aligned}
$$

とおいて考察する。

2.2 ARMHアルゴリズム

一般にベイズ推定法においては、研究者は観測されたデータ$\{y_t\}$に対して何らかのモデルを仮定し、さらにそのモデルのパラメータ ϑ の事前分布 $f_{prior}(\vartheta)$ を研究者の経験から仮定する。次にベイズの定理より尤度関数$L(\{y_t\}|\vartheta)$と事前分布の積から導出される事後分布

$$
f_{posterior}(\vartheta|\{y_t\}) = \frac{L(\{y_t\}|\vartheta)\times f_{prior}(\vartheta)}{\int L(\{y_t\}|\vartheta)\times f_{prior}(\vartheta)d\vartheta}
$$

を用いて､その平均である $\int \vartheta f_{posterior}(\vartheta|\{y_t\})d\vartheta$ により分析を行う。

しかしながら、尤度関数の形状が複雑な場合は事後分布を解析的に求めることができず、そのままではベイズ推定は利用できない。ただし、事後分布がどのような分布なのかわからない場合でも事後分布を利用してサンプリングが可能であれば、MCMC法を用いることで、サンプリングされたものから事後分布の性質を推論することが可能になる。本節で手短に紹介するARMHアルゴリズム[2)]は、そのようなMCMC 法のアルゴリズムの一つであり、受容・棄却（AR）アルゴリズムとMetropolis-Hastings（MH）アルゴリズムを組み合わせたものとなっている。

記号として、サンプリングを行いたい確率密度関数を$f(\vartheta|\{y_t\})$ ､実際にサンプリングを行う確率密度関数を提案密度関数として $g(\vartheta|\{y_t\})$ とおく。また二つの関数について正の定数を c とすると、 $f(\vartheta|\{y_t\}) \le cg(\vartheta|\{y_t\})$ が ϑ の定義域において成り立つことを条件とする。このときサンプル $\{\vartheta_n\}_{n=1}^{N}$ のARMHアルゴリズムは以下のようになる。

Step 1 ：初期値を ϑ_0 として、$n=1$ とおく。

Step 2 ：提案密度関数から ϑ の値をサンプリングし､受容確率を次のように計算する：

$$
p = \min\left[1, \frac{f(\vartheta|\{y_t\})}{cg(\vartheta|\{y_t\})}\right]
$$

Step 3 ：Step 2 で得られた ϑ を確率 p で受容し、確率 $1-p$で棄却する。

- 受容した場合は、$\tilde{\vartheta}=\vartheta$ として、Step 4 に進む。
- 棄却した場合は、Step 3 に戻る。

Step 4 ：受容確率 q をひとつ前の値 ϑ_{n-1} と $\tilde{\vartheta}$ を用いて次のように計算する。

- $f(\vartheta_{n-1}|\{y_t\}) < cg(\vartheta_{n-1}|\{y_t\})$ ならば、$q=1$
- $f(\vartheta_{n-1}|\{y_t\}) \ge cg(\vartheta_{n-1}|\{y_t\})$ かつ $f(\tilde{\vartheta}|\{y_t\}) < cg(\tilde{\vartheta}|\{y_t\})$ ならば、

$$
q = \frac{cg(\vartheta_{n-1}|\{y_t\})}{f(\vartheta_{n-1}|\{y_t\})}
$$

- $f(\vartheta_{n-1}|\{y_t\}) \ge cg(\vartheta_{n-1}|\{y_t\})$ かつ $f(\tilde{\vartheta}|\{y_t\}) \ge cg(\tilde{\vartheta}|\{y_t\})$ ならば、

$$
q = \min\left[1, \frac{f(\tilde{\vartheta}|\{y_t\})g(\vartheta_{n-1}|\{y_t\})}{f(\vartheta_{n-1}|\{y_t\})g(\tilde{\vartheta}|\{y_t\})}\right]
$$

Step 5 ：$\tilde{\vartheta}$ を確率 q で受容し、確率 $1-q$ で棄却する。

- 受容した場合は、 $\vartheta_n=\tilde{\vartheta}$とする。
- 棄却した場合は、 $\vartheta_n=\vartheta_{n-1}$ とする。

Step 6 ：$n<N$であるならば､$n=n+1$ としてStep 2 に戻る。$n=N$ の場合は、サンプリングを終了する。

実際にこのようにしてサンプリングを行った場合、初期値 ϑ_0 の影響が相関として発生させた $\{\vartheta_n\}_{n=1}^{N}$ にも存在すると考えられるため、初期値の影響を強く受けていると考えられるサンプルの部分を捨てて、残りの初期値の影響がなくなったと考えられるサンプルだけを使用してベイズ推定を行っている。

3　同時ベイズ推定における提案密度関数の導出

本節では前節で説明したGARCH-t(1,1)モデルをARMHアルゴリズムで全てのパラメータを同時にベイズ推定を行う際に用いる提案密度関数の導出とその理論的な正当性について証明する。

事後分布 $\pi(\theta)$ の形状が扱いやすい分布の形状をしていない場合、モードと呼ばれる事後分布を最大化するパラメータの値を中心として事後分布を二次のテーラー展開した上で、正規分布による近似を利用する。具体的には、

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta\in\Theta} \pi(\theta)$$

となるモード $\hat{\theta}$ を考える。このとき、対数を取った事後分布は(10)式で、また $\ln\pi(\theta)$ を微分したものは定数項を除いた $\ell(\theta)$ の微分と同じになるので、$\hat{\theta}$ はその一階の条件である

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\omega} = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\nu}{\sigma_t^2} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)}{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2}\right]\frac{1-\beta^t}{1-\beta} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\nu}{\sigma_t^2} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)}{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2}\right] \times\left(\sum_{k=1}^{t}\beta^{k-1}y_{t-k}^2\right) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\beta} = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\nu}{\sigma_t^2} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)}{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2}\right] \times\left(\sum_{k=1}^{t}\beta^{k-1}\sigma_{t-k}^2\right) = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\nu} =& \frac{T}{2}\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + \frac{T}{2}\frac{\nu}{\nu-2} \\ &+ \frac{T}{2}\ln(\nu-2) - \frac{T}{2}\psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - \lambda \\ &+\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\sigma_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln((\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2) \\ &- \frac{\nu+1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{\sigma_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2} = 0 \quad (14)\end{aligned}$$

の４つの式を満たすものとなる。ここで $\psi(x)$ はディガンマ関数と呼ばれるもので、対数をとったガンマ関数の微分であり、$\psi(x)=\frac{d\ln\Gamma(x)}{dx}$ である。

このようにして求めたモード $\hat{\theta}$ を中心として対数をとった事後分布 $\ln\pi(\theta)$ の二次のテーラー展開による近似を行うと、

$$\begin{aligned}\ln\pi(\theta) \propto& \ln\pi(\hat{\theta}) + \left.\frac{\partial\ln\pi(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}}(\theta-\hat{\theta}) \\ &+ \frac{1}{2}(\theta-\hat{\theta})' \left.\frac{\partial^2\ln\pi(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right|_{\theta=\hat{\theta}}(\theta-\hat{\theta})\end{aligned}$$

となる。ここでモードの定義より上の右辺第二項はゼロとなる。提案密度関数を $g(\theta)$ と記すと、

$$\ln g(\theta) \propto -\frac{1}{2}(\theta-\hat{\theta})'\left\{-\ddot{\ell}(\hat{\theta})\right\}(\theta-\hat{\theta}) \quad (15)$$

とすることができる。このとき、上の式における $\ddot{\ell}(\theta)$ は

$$\ddot{\ell}(\theta) := \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\omega^2} & \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\omega\partial\alpha} & \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\omega\partial\beta} & \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\omega\partial\nu} \\ \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\alpha\partial\omega} & \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\alpha\partial\beta} & \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\alpha\partial\nu} \\ \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\beta\partial\omega} & \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\beta^2} & \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\beta\partial\nu} \\ \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\nu\partial\omega} & \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\nu\partial\alpha} & \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\nu\partial\beta} & \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\nu^2} \end{pmatrix}$$

と定義したものであり、その対角要素は

$$\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\omega^2} = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\nu}{\sigma_t^4} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)^2}{\{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2\}^2}\right] \times\left(\frac{1-\beta^t}{1-\beta}\right)^2 \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\alpha^2} = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\nu}{\sigma_t^4} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)^2}{\{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2\}^2}\right] \times\left(\sum_{k=1}^{t}\beta^{k-1}y_{t-k}^2\right)^2 \quad (17)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\beta^2} =& -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\nu}{\sigma_t^4} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)^2}{\{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2\}^2}\right] \times\left(\sum_{k=1}^{t}\beta^{k-1}\sigma_{t-k}^2\right)^2 \\ &+\sum_{t=2}^{T}\left[\frac{\nu}{\sigma_t^2} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)}{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2}\right] \times\left(\sum_{k=1}^{t-1}k\beta^{k-1}\sigma_{t-1-k}^2\right) \quad (18)\end{aligned}$$

さらに、ディガンマ関数を微分したトリガンマ関数を $\psi^{(1)}(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\nu^2} =& \frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \frac{T\nu}{2}(\nu-2)^{-2} \\ &+T(\nu-2)^{-1} - \frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right) \\ &-\sum_{t=1}^{T}\frac{\sigma_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2} \\ &+\frac{\nu+1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\sigma_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2}\right)^2 \quad (19)\end{aligned}$$

となる。また非対角要素は対称行列なので、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\omega\partial\alpha} &= \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\alpha\partial\omega} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\nu}{\sigma_t^4} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)^2}{\{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2\}^2}\right] \\ &\qquad \times\left(\frac{1-\beta^t}{1-\beta}\right)\left(\sum_{k=1}^{t}\beta^{k-1}y_{t-k}^2\right) \quad (20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\beta\partial\alpha} &= \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\alpha\partial\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\nu}{\sigma_t^4} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)^2}{\{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2\}^2}\right] \\ &\qquad \times\left(\sum_{k=1}^{t}\beta^{k-1}\sigma_{t-k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{t}\beta^{k-1}y_{t-k}^2\right) \\ &\qquad +\frac{1}{2}\sum_{t=2}^{T}\left[\frac{\nu}{\sigma_t^2} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)}{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2}\right] \\ &\qquad\qquad \times\left(\sum_{k=1}^{t}k\beta^{k-1}y_{t-k}^2\right) \quad (21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\beta\partial\omega} &= \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\omega\partial\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\nu}{\sigma_t^4} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)^2}{\{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2\}^2}\right] \\ &\qquad \times\left(\sum_{k=1}^{t}\beta^{k-1}\sigma_{t-k}^2\right)\left(\frac{1-\beta^t}{1-\beta}\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{t=2}^{T}\left[\frac{\nu}{\sigma_t^2} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)}{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2}\right] \\ &\qquad\qquad \times\left(\sum_{k=1}^{t}k\beta^{k-1}\right) \quad (22)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\nu\partial\omega} &= \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\omega\partial\nu} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{1}{\sigma_t^2} - \frac{2\nu-1}{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{(\nu+1)(\nu-2)\sigma_t^2}{\{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2\}^2}\right]\left(\frac{1-\beta^t}{1-\beta}\right) \quad (23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\nu\partial\alpha} &= \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\alpha\partial\nu} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{1}{\sigma_t^2} - \frac{2\nu-1}{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{(\nu+1)(\nu-2)\sigma_t^2}{\{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2\}^2}\right]\left(\sum_{k=1}^{t}\beta^{k-1}y_{t-k}^2\right) \quad (24)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\nu\partial\beta} &= \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\beta\partial\nu} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{1}{\sigma_t^2} - \frac{2\nu-1}{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{(\nu+1)(\nu-2)\sigma_t^2}{\{(\nu-2)\sigma_t^2+y_t^2\}^2}\right]\left(\sum_{k=1}^{t}\beta^{k-1}\sigma_{t-k}^2\right) \quad (25)\end{aligned}$$

このとき、以下の命題１が成り立つのであれば、提案密度関数 $g(\theta)$ を平均が $\hat{\theta}$ 、分散共分散行列が $-\ddot{\ell}(\hat{\theta})$ の逆行列となる多変量正規分布と考えることができる。

命題１．GARCH-t(1,1) モデルを（１）から（８）としたとき、(15) で定義された提案密度関数 $g(\theta)$ の $-\ddot{\ell}(\hat{\theta})$ の逆行列は正定値である。

上で求めた提案密度関数 $g(\theta)$ が多変量正規分布として近似できるということを示すためには、命題１を示す必要がある。しかしながら、複雑な形状の行列の逆行列を直接求めて、逆行列が正定値であることを示すのは難しい。このため以下の系を用いて新しく命題２を設定し、その命題２を代わりに証明することで命題１の証明を行う。

系１（Harville (2008, p.216, Corollary 14.2.11)[3]）．（１）正定値行列は可逆であり、その逆行列も正定値である。（２）もし半正定値行列が非特異ならば、それは可逆でありその逆行列も半正定値である。

この系の（１）により、命題１は次の命題２と同値になる。

命題２．命題１の仮定と同じ条件下において、対称行列 $-\ddot{\ell}(\hat{\theta})$ は正定値である。

つまり、命題２で対称行列 $-\ddot{\ell}(\hat{\theta})$ が正定値であることを示すことで、系１の（１）から命題１における逆行列である $-\ddot{\ell}^{-1}(\hat{\theta})$ が正定値となることを証明することができる。

命題２の証明の方針として、次の定理を利用する。

定理１（Harville (2008, p.250, Theorem 14.9.5)[4]）．$\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$ を $n\times n$ 対称行列，$k=1,2,\ldots,n$ に対して、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

を次数 k の $\mathbf{A}$ の首座部分行列式とする。このとき、$k=1,2,\ldots,n$ に対して、$\det(\mathbf{A}_k)>0$ のときか

つそのときに限って、すなわち、$\mathbf{A}$ の首座部分小行列 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ の n 個の行列式がすべて正のときかつそのときに限って、$\mathbf{A}$ は正定値である。

以下では、記号の簡略化のため $A(\hat{\theta}) := -\ddot{\ell}(\hat{\theta})$ とおいて、その要素を a_{ij} で表記する。つまり、

$$A(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

と記すと、行列 $A(\hat{\theta})$ の首座部分小行列は、

$$|a_{11}|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{26}$$

と表記できる。このとき、上の４つの行列式がすべて正であることを証明すれば、定理１より行列 $A(\hat{\theta})$ が正定値行列になり、命題２が証明できることになる。以下では各パラメータは事後分布のモードでの値として扱い、表記の簡略化のため $\hat{\theta}$ 以外のハットは省略する。

まず(11)、(12)、(13) において異なる加重で評価しているので、$\hat{\theta}$では各 t において

$$\frac{\nu}{\sigma_t^2} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)}{(\nu-2)\sigma_t^2 + y_t^2} = 0 \tag{27}$$

が成り立つ。このとき、二つの式の符号は次のようになる。

$$\frac{\nu}{\sigma_t^4} - \frac{(\nu+1)(\nu-2)^2}{\{(\nu-2)\sigma_t^2 + y_t^2\}^2} = \frac{\nu}{(\nu+1)\sigma_t^4} > 0 \tag{28}$$

$$\frac{1}{\sigma_t^2} - \frac{2\nu-1}{(\nu-2)\sigma_t^2 + y_t^2} + \frac{(\nu+1)(\nu-2)\sigma_t^2}{\{(\nu-2)\sigma_t^2 + y_t^2\}^2} = -\frac{2}{(\nu+1)(\nu-2)\sigma_t^2} < 0 \tag{29}$$

さらに便宜上、以下のように記号をおく。

$$a_t := \frac{1}{\sigma_t^2}\frac{1-\beta^t}{1-\beta}, \quad b_t := \frac{1}{\sigma_t^2}\sum_{k=1}^{t}\beta^{k-1}y_{t-k}^2,$$
$$c_t := \frac{1}{\sigma_t^2}\sum_{k=1}^{t}\beta^{k-1}\sigma_{t-k}^2$$

このとき、行列 $A(\hat{\theta})$ の各要素の式は以下のように表すことができる。(16)～(18)と(28)より、

$$a_{11} = -\left.\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \omega^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{\nu}{2(\nu+1)}\sum_{t=1}^{T} a_t^2 \tag{30}$$

$$a_{22} = -\left.\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \alpha^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{\nu}{2(\nu+1)}\sum_{t=1}^{T} b_t^2$$

$$a_{33} = -\left.\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{\nu}{2(\nu+1)}\sum_{t=1}^{T} c_t^2$$

(19)より

$$\begin{aligned} a_{44} &= -\left.\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \nu^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} \\ &= -\frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + \frac{T\nu}{2}(\nu-2)^{-2} \\ &\quad - T(\nu-2)^{-1} + \frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right) \\ &\quad + \sum_{t=1}^{T}\frac{\sigma_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2 + y_t^2} \\ &\quad - \frac{\nu+1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\sigma_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2 + y_t^2}\right)^2 \end{aligned}$$

ここで(27)から、

$$\frac{\sigma_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2 + y_t^2} = \frac{\nu}{(\nu+1)(\nu-2)}$$

なので、

$$\begin{aligned} a_{44} &= -\frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + \frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right) \\ &\quad + \frac{T}{2}\frac{\nu}{(\nu-2)^2} - \frac{T}{2}\frac{2}{\nu-2} \\ &\quad + \frac{T\nu}{(\nu+1)(\nu-2)} - \frac{T}{2}\frac{\nu^2}{(\nu+1)(\nu-2)^2} \\ &= -\frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + \frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{T(4-\nu)}{2(\nu+1)(\nu-2)^2} \end{aligned}$$

となる。後で利用するので a_{44} の符号を確認すると、$\nu > 4$ なので右辺第三項は負になる。一方でトリガンマ関数 $\psi^{(1)}(x)$ が $x > 0$ で $\psi^{(1)}(x) > 0$ かつ減少関数であることから、右辺第一項と第二項の和は正となる。符号の評価のために共通部分の Tを外した

$$-\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)+\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right)-\frac{\nu-4}{2(\nu+1)(\nu-2)^2} \quad (31)$$

は、付録の証明より正となる。したがって、$a_{44}>0$ となる。

非対角要素に関しては、対称行列なので、(20)～(25)、(28)と(29)から、

$$a_{12}=a_{21}=-\left.\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\omega\partial\alpha}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=\frac{\nu}{2(\nu+1)}\sum_{t=1}^{T}a_tb_t$$

$$a_{13}=a_{31}=-\left.\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\beta\partial\omega}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=\frac{\nu}{2(\nu+1)}\sum_{t=1}^{T}a_tc_t$$

$$a_{14}=a_{41}=-\left.\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\nu\partial\omega}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=\frac{1}{(\nu+1)(\nu-2)}\sum_{t=1}^{T}a_t$$

$$a_{23}=a_{32}=-\left.\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\beta\partial\alpha}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=\frac{\nu}{2(\nu+1)}\sum_{t=1}^{T}b_tc_t$$

$$a_{24}=a_{42}=-\left.\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\nu\partial\alpha}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=\frac{1}{(\nu+1)(\nu-2)}\sum_{t=1}^{T}b_t$$

$$a_{34}=a_{43}=-\left.\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\nu\partial\beta}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=\frac{1}{(\nu+1)(\nu-2)}\sum_{t=1}^{T}c_t$$

となっている。以上を踏まえたうえで、以下では(26)の４つの首座部分小行列が正であることを示していく。

命題２の証明：(26)の１×１の首座部分小行列は(30)より、$|a_{11}|=a_{11}>0$ 。

(26)の２×２の首座部分小行列は、行列の対称性を利用すると以下のように計算できる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}^2$$
$$=\left(\frac{\nu}{2(\nu+1)}\right)^2\left[\left\{\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right\}\left\{\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right\}-\left\{\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right\}^2\right]$$

ここで、コーシー・シュワルツの不等式から、等号条件は満たさないので、$a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$ となる。(26)の３×３の首座部分小行列はサラスの方法と行列の対称性から

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{13}a_{23}+a_{12}a_{13}a_{23} - a_{13}^2a_{22}-a_{23}^2a_{11}-a_{12}^2a_{33}$$

$$=\left(\frac{\nu}{2(\nu+1)}\right)^3\left[\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right) + 2\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_ta_t\right) - \left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)^2\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right)-\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)^2\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right) - \left(\sum_{t=1}^{T}c_ta_t\right)^2\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\right]$$

$$=\left(\frac{\nu}{2(\nu+1)}\right)^3\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{\substack{s=1\\s\neq t}}^{T}\sum_{\substack{m=1\\m\neq s\\m\neq t}}^{T}a_tb_sc_m \times\left\{a_tb_sc_m+2a_mb_tc_s-a_sb_tc_m-a_tb_mc_s-a_mb_sc_t\right\}\right]$$

となる。ここで、$\nu>4$ なので、

$$\left(\frac{\nu}{2(\nu+1)}\right)^3>0$$

がわかる。次に上の後半の括弧の中で各要素の t、s、m が異なる値を取ることから、(t,s,m) の数字の組み合わせで一つのグループを作ることを考える。そのために数字の組み合わせの集合を $\mathcal{F}_{T,3}$ とおき、数字の組み合わせに対応するように添え字を合わせる。この時、各組み合わせは添え字の並べ替えで６種類あることから、

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{\substack{s=1\\s\neq t}}^{T}\sum_{\substack{m=1\\m\neq s\\m\neq t}}^{T}a_tb_sc_m\left\{a_tb_sc_m+2a_mb_tc_s - a_sb_tc_m-a_tb_mc_s-a_mb_sc_t\right\}$$
$$=\sum_{(t,s,m)\in\mathcal{F}_T}\left[\left\{a_t^2b_s^2c_m^2+2a_ta_mb_tb_sc_sc_m - a_ta_sb_tb_sc_m^2-a_t^2b_sb_mc_sc_m-a_ta_mb_s^2c_tc_m\right\} +\left\{a_s^2b_t^2c_m^2+2a_sa_mb_sb_tc_tc_m-a_sa_tb_sb_tc_m^2 - a_s^2b_tb_mc_tc_m-a_sa_mb_t^2c_sc_m\right\} +\left\{a_t^2b_m^2c_s^2+2a_ta_sb_tb_mc_mc_s-a_ta_mb_tb_mc_s^2 - a_t^2b_mb_sc_mc_s-a_ta_sb_m^2c_tc_s\right\}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big\{a_m^2b_s^2c_t^2+2a_ma_tb_mb_sc_sc_t-a_ma_sb_mb_sc_t^2\\
&\qquad-a_m^2b_sb_tc_sc_t-a_ma_tb_s^2c_mc_t\Big\}\\
&+\Big\{a_s^2b_m^2c_t^2+2a_sa_tb_sb_mc_mc_t-a_sa_mb_sb_mc_t^2\\
&\qquad-a_s^2b_mb_tc_mc_t-a_sa_tb_m^2c_sc_t\Big\}\\
&+\Big\{a_m^2b_t^2c_s^2+2a_ma_sb_mb_tc_tc_s-a_ma_tb_mb_tc_s^2\\
&\qquad-a_m^2b_tb_sc_tc_s-a_ma_sb_t^2c_mc_s\Big\}\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\sum_{(t,s,m)\in\mathcal{F}_{T,3}}\Bigg[(a_tb_sc_m)^2+(a_sb_tc_m)^2+(a_tb_mc_s)^2\\
&+(a_mb_sc_t)^2+(a_sb_mc_t)^2+(a_mb_tc_s)^2\\
&+2a_tb_sc_m\cdot a_mb_tc_s+2a_sb_tc_m\cdot a_mb_sc_t\\
&+2a_tb_mc_s\cdot a_sb_tc_m+2a_mb_sc_t\cdot a_tb_mc_s\\
&+2a_sb_mc_t\cdot a_tb_sc_m+2a_mb_tc_s\cdot a_sb_mc_t\\
&-2a_tb_sc_m\cdot a_tb_mc_s-2a_sb_tc_m\cdot a_sb_mc_t\\
&-2a_mb_tc_s\cdot a_mb_sc_t-2a_sb_tc_m\cdot a_mb_tc_s\\
&-2a_tb_sc_m\cdot a_mb_sc_t-2a_tb_mc_s\cdot a_sb_mc_t\\
&-2a_sb_mc_t\cdot a_mb_sc_t-2a_tb_mc_s\cdot a_mb_tc_s\\
&-2a_tb_sc_m\cdot a_sb_tc_m\Bigg]\\
=&\sum_{(t,s,m)\in\mathcal{F}_{T,3}}\Bigg[a_tb_sc_m-a_sb_tc_m-a_tb_mc_s\\
&-a_mb_sc_t+a_sb_mc_t+a_mb_tc_s\Bigg]^2\geq 0
\end{aligned}
$$

となる。ここで、等号が成立する条件は全ての$(t, s, m)\in\mathcal{F}_{T,3}$に対して上の式の大きな括弧の中が０になるというものであるが、このような条件を満たすためには、全ての$\{y_t^2\}$が一定または全ての$\{\sigma_t^2\}$が一定であることが必要となる。しかしながらそのような状況は本論文で使用するGARCH-t(1,1)モデルでの分析には適さない状況であるため、考察から排除できる。したがって等号条件は成立しなくなるので、上の式は正となる。

(26)の４×４の首座部分小行列は以下のように展開する。

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}\\
=\;& a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}\\
&+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}-a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{vmatrix}\\
=\;& a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+2a_{11}a_{23}a_{24}a_{34}-a_{11}a_{22}a_{34}^2\\
&-a_{11}a_{24}^2a_{33}-a_{11}a_{23}^2a_{44}\\
&-a_{12}^2a_{33}a_{44}-a_{12}a_{13}a_{24}a_{34}-a_{12}a_{14}a_{23}a_{34}\\
&+a_{12}^2a_{34}^2+a_{12}a_{14}a_{24}a_{33}+a_{12}a_{13}a_{23}a_{44}\\
&+a_{12}a_{13}a_{23}a_{44}+a_{13}^2a_{24}^2+a_{13}a_{14}a_{22}a_{23}\\
&-a_{12}a_{13}a_{24}a_{34}-a_{13}^2a_{22}a_{44}-a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}\\
&-a_{12}a_{14}a_{23}a_{34}-a_{13}a_{14}a_{23}a_{34}-a_{14}^2a_{22}a_{33}\\
&+a_{12}a_{14}a_{24}a_{33}+a_{13}a_{14}a_{22}a_{34}+a_{14}^2a_{23}^2\\
=&\left(\frac{\nu}{2(\nu+1)}\right)^3\Bigg[-\frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)+\frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right)\\
&+\frac{T(4-\nu)}{2(\nu+1)(\nu-2)^2}-T\left(\frac{\nu}{2(\nu+1)}\right)^{-1}\\
&\times\left(\frac{1}{(\nu+1)(\nu-2)}\right)^2\Bigg]\\
&\times\Bigg[\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right)\\
&+2\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)\\
&-\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)^2-\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)^2\\
&-\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)^2\Bigg]\\
&+\left(\frac{\nu}{2(\nu+1)}\right)^2\left(\frac{1}{(\nu+1)(\nu-2)}\right)^2\\
&\times\Bigg[T\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right)\\
&+2T\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)\\
&-T\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)^2-T\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)^2\\
&-T\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)^2
\end{aligned}
$$

$$+2\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t\right)$$
$$+2\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t\right)$$
$$+2\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t\right)$$
$$-2\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t\right)$$
$$-2\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t\right)$$
$$-2\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t\right)$$
$$-\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t\right)^2$$
$$-\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t\right)^2$$
$$-\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_t\right)^2$$
$$+\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)^2\left(\sum_{t=1}^{T}c_t\right)^2+\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)^2\left(\sum_{t=1}^{T}b_t\right)^2$$
$$\left.+\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)^2\left(\sum_{t=1}^{T}a_t\right)^2\right]$$

ここで、各項目の符号を確認していく。まず右辺第一項に関しては、第一要素は先ほどの議論より正であることが分かっている。

また 3×3 の首座部分小行列の結果より、右辺第一項の第三要素は

$$\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right)+2\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)$$
$$-\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)^2-\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)^2-\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)^2>0$$

残りの部分、右辺第一項の第二要素の

$$-\frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)+\frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right)+\frac{T(4-\nu)}{2(\nu+1)(\nu-2)^2}-T\left(\frac{\nu}{2(\nu+1)}\right)^{-1}\left(\frac{1}{(\nu+1)(\nu-2)}\right)^2$$

については、前半部分はトリガンマ関数が単調減少関数であることから、

$$-\frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)+\frac{T}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right)>0$$

となる。後半部分は

$$\frac{T(4-\nu)}{2(\nu+1)(\nu-2)^2}-T\left(\frac{\nu}{2(\nu+1)}\right)^{-1}\left(\frac{1}{(\nu+1)(\nu-2)}\right)^2=-\frac{T}{2\nu(\nu+1)}$$

ここで $\nu>4$ なので、後半部分は負になる。符号を見るために共通部分の T を外した

$$-\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)+\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right)-\frac{1}{2\nu(\nu+1)}$$

は、$a_{44}>0$ を証明した時に使用した

$$-\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)+\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right)>\frac{1}{2\nu(\nu+1)}$$

より、正となる。

次に右辺第二項について考える。右辺第二項の第一要素と第二要素は $\nu>4$ より

$$\left(\frac{\nu}{2(\nu+1)}\right)^2>0,\quad\left(\frac{1}{(\nu+1)(\nu-2)}\right)^2>0$$

と正である。右辺第二項の第三要素は複雑なので、以下のように丁寧に展開すると

$$T\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right)$$
$$+2T\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)$$
$$-T\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)^2-T\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)^2$$
$$-T\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)^2$$
$$+2\left(\sum_{t=1}^{T}a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t\right)$$
$$+2\left(\sum_{t=1}^{T}c_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t\right)$$
$$+2\left(\sum_{t=1}^{T}b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t\right)$$
$$-2\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t\right)$$
$$-2\left(\sum_{t=1}^{T}a_tb_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}c_t\right)$$
$$-2\left(\sum_{t=1}^{T}a_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_tc_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}a_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}b_t\right)$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\sum_{t=1}^{T} a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T} b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T} c_t\right)^2 \\
&-\left(\sum_{t=1}^{T} a_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T} c_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T} b_t\right)^2 \\
&-\left(\sum_{t=1}^{T} b_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T} c_t^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T} a_t\right) \\
&+\left(\sum_{t=1}^{T} a_t b_t\right)^2\left(\sum_{t=1}^{T} c_t\right)^2+\left(\sum_{t=1}^{T} a_t c_t\right)^2\left(\sum_{t=1}^{T} b_t\right)^2 \\
&+\left(\sum_{t=1}^{T} b_t c_t\right)^2\left(\sum_{t=1}^{T} a_t\right)^2 \\
&=\sum_{t=1}^{T}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq t}}^{T}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq t}}^{T}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq t}}^{T}(a_t^2 b_s^2 c_m^2+2a_t a_s b_t b_m c_s c_m \\
&\qquad -a_t^2 b_s b_m c_s c_m-a_s a_m b_s b_m c_t^2-a_s a_m b_t^2 c_s c_m \\
&+2a_t^2 b_s b_m c_s c_n+2a_s a_m b_s b_n c_t^2+2a_s a_m b_t^2 c_s c_n \\
&\qquad -2a_t a_s b_t b_m c_s c_n-2a_t a_m b_t b_s c_s c_n-2a_t a_m b_s b_n c_t c_s \\
&-a_t^2 b_s^2 c_m c_n-a_t^2 b_m b_n c_s^2-a_m a_n b_t^2 c_s^2 \\
&\qquad +a_t a_s b_t b_s c_m c_n+a_t a_s b_m b_n c_t c_s+a_m a_n b_t b_s c_t c_s)
\end{aligned}
$$

と変形できる。3×3の首座部分小行列の時と同様に、ここから先は添え字の組み合わせごとの和が二乗和になることを考える。各組み合わせが24パターンあるので、その集合を $\mathcal{F}_{T,4}$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{T}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq t}}^{T}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq t\\ m\neq s}}^{T}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq t\\ n\neq s\\ n\neq m}}^{T}(a_t^2 b_s^2 c_m^2+2a_t a_s b_t b_m c_s c_m \\
&\qquad -a_t^2 b_s b_m c_s c_m-a_s a_m b_s b_m c_t^2-a_s a_m b_t^2 c_s c_m \\
&+2a_t^2 b_s b_m c_s c_n+2a_s a_m b_s b_n c_t^2+2a_s a_m b_t^2 c_s c_n \\
&\qquad -2a_t a_s b_t b_m c_s c_n-2a_t a_m b_t b_s c_s c_n-2a_t a_m b_s b_n c_t c_s \\
&-a_t^2 b_s^2 c_m c_n-a_t^2 b_m b_n c_s^2-a_m a_n b_t^2 c_s^2 \\
&\qquad +a_t a_s b_t b_s c_m c_n+a_t a_s b_m b_n c_t c_s+a_m a_n b_t b_s c_t c_s) \\
&=\sum_{(t,s,m,n)\in\mathcal{F}_{T,4}}(a_t b_s c_m-a_t b_s c_n-a_t b_m c_s \\
&\qquad +a_t b_m c_n+a_t b_n c_s-a_t b_n c_m-a_s b_t c_m+a_s b_t c_n \\
&+a_s b_m c_t-a_s b_m c_n-a_s b_n c_t+a_s b_n c_m \\
&\qquad +a_m b_t c_s-a_m b_t c_n-a_m b_s c_t+a_m b_s c_n \\
&+a_m b_n c_t-a_m b_n c_s-a_n b_t c_s+a_n b_t c_m \\
&\qquad +a_n b_s c_t-a_n b_s c_m-a_n b_m c_t+a_n b_m c_s)^2
\end{aligned}
$$

となるので、右辺第二項の第三要素は非負となる。したがって、右辺第二項は非負となるので、右辺第一項が正であることから、4×4の首座部分小行列は正となる。

以上の結果をまとめると、対称行列 $A(\hat{\theta})$ の「首座部分小行列が全て正である」ということが示された。

したがって定理1により、対称行列 $A(\hat{\theta})$ の首座部分小行列が全て正であることから、$A(\hat{\theta})$ は正定値であるという命題2が証明された。 □

命題1の証明： 命題2より対称行列 $A(\hat{\theta})$ が正定値であることからが示されたので、系1の(1)より $A(\hat{\theta})$ の逆行列は正定値であることが示される。$A(\hat{\theta})$ は $-\ddot{\ell}(\theta)$ であったので、$-\ddot{\ell}^{-1}(\hat{\theta})$ が正定値であることが示された。 □

以上の議論から命題1が証明されたので、本研究における(15)の提案密度関数として多変量正規分布を用いることが可能であるということが示された。

4　結論と今後の課題

本論文では、単純な仮定の下におけるGARCH-t(1,1)モデルのパラメータの新しいベイズ推定手法について紹介し、ARMHアルゴリズムに基づいた同時ベイズ推定手法で使用する提案密度関数が多変量正規分布で近似できることを証明した。この新しい推定手法により、複数のパラメータのグループに分割したうえでサンプリングを行っていた既存の一般的な手法以外にも、ベイズ推定を行う際の選択肢ができたということになる。特にパラメータを複数のグループに分割した場合には、パラメータのサンプリングの順番という問題が存在したが、本論文で紹介した手法を使う場合はその問題を回避できる。さらに新しい手法の応用例として、GARCH-t(1,1)モデルにジャンプや分布の非対称性などの他の要素を追加したモデルのベイズ推定を行う際にも、GARCH-t(1,1)に関する4つのパラメータを1つのグループにまとめてサンプリングできることになる。

今後の課題としては主に、初期値や事前分布の仮定を変更した場合への拡張や、GARCH-tモデルのパラメータを一般の形にしたGARCH-t (p,q) モデルへの拡張がある。また、他のベイズ推定手法、特にパラメータをグループに分割してサンプリングする既存の一般的な方法との効率性の比較も課題として残っている。

（2016年11月30日受付、2017年1月12日受理）

謝　辞

本論文は日興アセットマネジメント株式会社の伊藤智明氏の数値実験と実証研究で用いられたGARCH-t(1,1)モデルによるベイズ推定手法の理論的な背景の説明を動機として行われた研究の成果をまとめたものであり、本研究の実施と公表を快く了承してくださった伊藤氏に心より感謝する。また、研究の初期段階において一橋大学経済研究所渡部敏明教授と渡部教授の大学院のゼミの参加者より貴重なコメントをいただいた。ここに記して深く感謝の意を表したい。最後に、有益なコメントを頂いたことに対して匿名の本誌査読者に感謝する。

注

1）2013年６月の一橋大学大学院経済学研究科渡部敏明ゼミにおける研究報告

2）詳細は渡部（2000）や Chib and Greenberg（1995）を参照。

3）和訳は伊理（監訳）（2007、上、p.256、系14.2.11）より引用。

4）和訳は伊理（監訳）（2007、上、p.298、定理14.9.5）より引用。

参考文献

（日本語文献）

三井秀俊（2014),『ARCH 型モデルによる金融資産分析』, 税務経理協会.

三井秀俊・渡部敏明（2003),「ベイズ推定法によるGARCH オプション価格付けモデルの分析」,『日本統計学会誌』,第33巻,第３号, pp.307-324.

渡部敏明（2000),『ボラティリティ変動モデル』, 朝倉書店.

渡部敏明（2005),「第９章　マルチ・ムーブ・サンプラーを用いた確率的ボラティリティ変動ベイズ推定法」, 和合肇（編）『ベイズ計量経済分析　マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』, pp.259-294.

（外国語文献）

Ardia, D. and Hoogerheide, L. F. (2010), Bayesian Estimation of the GARCH(1,1) Model with Student-t Innovations. *The R Journal*, 2(2), pp.41-47.

Asai, M. (2006), Comparison of MCMC Methods for Estimating GARCH Models, J. *Japan Statist. Soc*., 36, pp.199-212.

Asai, M.(2015). Bayesian Analysis of General Asymmetric Multivariate GARCH Models and Nes Impact Curves, *J. Japan Statist. Soc*., 45, pp.129-144.

Bollerslev, T. (1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, pp.307-327.

Chib, S. and Greenberg, E. (1995), Understanding the Metropolis-Hasting Algorithm, *American Statistician*, 49, pp.327-335.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasicity with Estimates of the Variance of U. K. Ination, *Econometrica*, 50, pp.987-1008.

Gradsheyn, I. S. and Ryzhik, I. M.; Zwillinger, D. (editor); Moll, V. (Scientific editor) (2015) *Table of Integrals, Series, and Products Eighth Edition*, Academic Press, Amsterdam.

Harville, D. A. (2008) *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*, Springer, New York.（伊理正夫（監訳）(2007)『統計のための行列代数　上・下』, シュプリンガー・ジャパン）

Nakatsuma, T. (2000), Bayesian Analysis of ARMA-GARCH Models: A Markov Chain Sampling Approach. *Journal of Econometircs*, 95, pp.57-69.

Virbickaite, A., Ausín, M. C. and Galeano, P. (2015), Bayesian Inference for GARCH and EGARCH Models, *Journal of Economic Survey,* 29, pp.79-96.

Vrontos, I. D., Dellaportas, P. and Politis, D. N. (2000), Full Bayesian Inference for GARCH and EGARCH Models, *Journal of Business & Economic Statistics*, 18, pp.187-198.

付録（31）の証明

本付録では、(31) の式

$$-\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)+\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right)-\frac{\nu-4}{2(\nu+1)(\nu-2)^2}$$

が正になることを証明する。

証明：Gradsheyn et al.（2015、p.913、8.363.8）より、トリガンマ関数 $\psi^{(1)}(x)$は以下のように無限数列の和で表現できる。

$$\psi^{(1)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+x)^{-2}$$

この表現を利用して、(31) の第一項を書き直すと、

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)+\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right)\\
&\quad= -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{\nu+1}{2}\right)^{-2}+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{\nu}{2}\right)^{-2}\\
&\quad= -\sum_{k=0}^{\infty}(2k+\nu+1)^{-2}+\sum_{k=0}^{\infty}(2k+\nu)^{-2}\\
&\quad= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4k+2\nu+1}{(2k+\nu)^2(2k+\nu+1)^2}
\end{aligned}$$

ここで、この減少する無限数列を、kを横軸、各項の大きさを縦軸で表し、$k=0$ から幅 1 の縦棒が横に並んでいると考えると、その和は縦棒の面積になる。そこで、各縦棒の左端を通るような曲線と横軸からなる面積を考えると、それは数列の無限和よりも小さくなるので、

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4k+2\nu+1}{(2k+\nu)^2(2k+\nu+1)^2} > \int_0^{\infty}\frac{4x+2\nu+1}{(2x+\nu)^2(2x+\nu+1)^2}dx$$

次にGradsheyn et al.（2015、p.67、2.103.3）より、以下の不定積分の公式

$$\begin{aligned}
&\int\frac{Mx+N}{(A+2Bx+Cx^2)^p}dx\\
&\quad=\frac{NB-MA+(NC-MB)x}{2(p-1)(AC-B^2)(A+2Bx+Cx^2)^{p-1}}\\
&\qquad+\frac{(2p-3)(NC-MB)}{2(p-1)(AC-B^2)}\int\frac{dx}{(A+2Bx+Cx^2)^{p-1}}
\end{aligned}$$

を上の式に当てはめると、

$$\int_0^{\infty}\frac{4x+2\nu+1}{(2x+\nu)^2(2x+\nu+1)^2}dx=\int_0^{\infty}\frac{4x+2\nu+1}{(\nu(\nu+1)+2(2\nu+1)x+4x^2)^2}dx$$

から、$A=\nu(\nu+1)$、$B=2\nu+1$、$C=4$、$M=4$、$N=2\nu+1$、$p=2$ となる。このとき、

$$\begin{aligned}
NB-MA &= (2\nu+1)^2-4\nu(\nu+1)\\
&=4\nu^2+4\nu+1-4\nu^2-4\nu=1\\
NC-MB &= (2\nu+1)\times 4-4\times(2\nu+1)=0\\
AC-B^2 &= \nu(\nu+1)\times 4-(2\nu+1)^2=-1
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\frac{4x+2\nu+1}{(\nu(\nu+1)+2(2\nu+1)x+4x^2)^2}dx\\
&\quad=\left.\frac{1}{2(2-1)(-1)(\nu(\nu+1)+2(2\nu+1)x+4x^2)}\right|_{x=0}^{\infty}\\
&\quad=0-\frac{1}{2(-1)(\nu(\nu+1))}\\
&\quad=\frac{1}{2\nu(\nu+1)}
\end{aligned}$$

以上の結果をまとめると、

$$-\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)+\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right)>\frac{1}{2\nu(\nu+1)}$$

となる。このことから、

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)+\frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(\frac{\nu}{2}\right)-\frac{\nu-4}{2(\nu+1)(\nu-2)^2}\\
&\quad>\frac{1}{2\nu(\nu+1)}-\frac{\nu-4}{2(\nu+1)(\nu-2)^2}>0
\end{aligned}$$

となるので、(31) が正であることが示された。□

Simultaneous Bayesian Estimation of GARCH(1,1) Models with Student-t Innovations

Kei NANAMIYA

Abstract

This paper explores a new Bayesian estimation method for GARCH(1,1) models with Student-t innovations under the simple assumptions. Unlike the existing popular methods, in this method all parameters of these models are generated simultaneously by the acceptance-rejection Metropolis-Hasting algorithm. To justify this method, this paper shows that the proposal density function in this method can be approximated by a multivariate normal density function.