

長期記憶過程に対するウェーブレット解析を用いた 近似最尤推定法のシミュレーション研究

七宮 圭*

趣 旨

本論文では、長期記憶過程のパラメータの推定問題について、ウェーブレット解析を利用した近似最尤法のパフォーマンスをシミュレーションにより比較する。また、観測系列が長期記憶過程と長期記憶過程とは独立なノイズの過程で構成されている場合のパラメータの推定問題についても、ウェーブレットによる近似最尤推定法のパフォーマンスを比較する。

1 はじめに

長期記憶過程は時系列解析の分野において主要な研究テーマの一つであり、自然科学から社会科学まで多岐にわたる分野において研究されている。長期記憶過程の特徴は、過去の値への依存度の減衰が遅いため、自己共分散の絶対和が発散することであり、それは周波数領域で考えた場合、原点において発散するようなスペクトル関数を持つことである。このため、長期記憶過程に従うモデルに関しては、時間領域やフーリエ解析を利用する周波数領域、ウェーブレット解析を利用する時間-周波数領域における分析手法が研究されてきた(詳細は田中(2006)、Faÿ et al.(2009)を参照)。このような過程の例としてはナイル川の最小水位データが有名であり、近年ではボラティリティと呼ばれる株式収益率の分散の変動の系列の分析にも用いられている。さらに観測系列が長期記憶過程にノイズを加えたモデルとして解釈できるLMSV(long memory stochastic volatility)モデル(Bredt et al.(1998)、Deo and Hurvich(2003))もある。

特にウェーブレット解析を利用した推定法では、McCoy and Walden(1996)にあるように、非正常な場合においても長期記憶過程を変換後のウェーブレット係数をスケールのレベルごと

に分散の大きさが異なるホワイトノイズ(White Noise, WN)の系列として近似することで、パラメータの推定が他の手法よりも簡単にできるということから、その推定量の漸近理論などの研究が多く行われてきた(Bardet et al.(2000)、Bardet(2002)、Moulines et al.(2007, 2008)、Roueff and Taqqu(2009))。またその一方で、変換後の系列がWNではなく、レベルごとに定常過程に従うと考えると、1階の自己回帰(AR(1))モデルにより近似して推定する方法も提案されている(Craigmaile et al.(2005))。また、長期記憶過程にノイズを加えた観測系列に対するウェーブレット解析の研究例としては、Wornell and Oppenheim(1992)、Kaplan and Kao(1993)やZhang et al.(2004)ではEMアルゴリズムを用いて観測系列の中から長期記憶過程を復元する研究が行われている。また、Tanaka(2004)ではWN近似を用いた近似最尤推定法の研究が行われ、Nanamiya(2011)ではAR(1)近似の拡張としてARMA近似による近似最尤推定法が提案されている。

このように多くの研究が既に行われているが、非正常の場合の長期記憶過程の定式化に関しては議論がまだに残っている。従来の研究の多くでは、Hurvich and Ray(1995)やNanamiya(2011)のように定常な長期記憶過程を和分することで非正常な長期記憶過程を定義している。その一

※ 青森公立大学講師

方で、最近ではNanamiya (2014) のように観測以前の値は存在しないと考えると、切断したモデルを定義する方法もある。このような長期記憶過程のモデルを扱ったウェーブレット解析に関する研究は少ないため、本論文ではNanamiya (2014) で使用した長期記憶過程のモデルを採用し、そのパラメータの推定問題について、ウェーブレット解析を用いた近似最尤推定法のパフォーマンスをシミュレーションにより考察する。

次節以降の構成は以下のとおりである。第2節では、本論文で使用する従来の研究とは異なる長期記憶過程に従うモデルを定義する。第3節では、理論的な準備として離散ウェーブレット変換について説明する。第4節の前半では、ウェーブレット解析を用いた長期記憶過程の記憶パラメータの近似最尤推定法について解説する。また、第4節の後半では、応用問題として観測した系列が長期記憶過程にノイズを加えた系列である場合の近似最尤推定法について説明する。第5節では、シミュレーションによる結果について考察し、第6節において本論文の結論と今後の課題について述べる。

2 長期記憶過程

従来の多くの研究において長期記憶過程に従うモデルの簡単な例として用いられているのは、

$$(1 - B)^d X_t = \varepsilon_t$$

というフラクショナル和分(Fractionally Integrated, FI) モデルと呼ばれるもので、FI(d)モデルと表記したり、ARFIMA (AutoRegressive Fractinally Integrated Moving Average) モデルの一種であることから、ARFIMA (0, d ,0) モデルと表記することもある。ここで、 B はバックシフト・オペレーターで、 $B^s X_t = X_{t-s}$ となる。また、 d は記憶パラメータで $d \in \mathbb{R}$ を満たし、攪乱項の系列 $\{\varepsilon_t\}$ は $\varepsilon_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ を仮定する。このとき、 $\{X_t\}_{t=0}^{T-1}$ は $d < \frac{1}{2}$ の場合には定常過程となり、 $d \geq \frac{1}{2}$ の場合には非定常な過程となる (詳細は田中 (2006) 参照)。ガンマ関数 $\Gamma(\cdot)$ を

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx, \quad p > 0$$

と定義すると、上記のモデルは

$$X_t = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+d)}{\Gamma(d)\Gamma(s+1)} \varepsilon_{t-s}$$

と攪乱項の無限加重和で表現できる。このようなモデルを用いる場合には、攪乱項の無限和であることから、非定常の場合における取り扱いに注意が必要となる。実際には、非定常の場合は K を整数とすると、 $d^* = d - K < \frac{1}{2}$ を満たす最大の d^* によって定常な過程を生成し、その定常な過程を用いて K 階の和分過程を作ることによって $\{X_t\}_{t=0}^{T-1}$ を生成することになる。

これに対して、本論文で使用する長期記憶過程として、 $\{X_t\}_{t=0}^{T-1}$ が

$$(1 - B)^d X_t = \varepsilon_t \mathbf{1}(t \geq 0) \quad (1)$$

に従っていると定義する。ここで、 $\mathbf{1}(\cdot)$ は指示関数を表し、 (\cdot) の条件が満たされる時は1、それ以外は0の値をとる。このモデルを本論文では切断 FI(d) モデルと呼ぶことにする。この場合、観測以前のデータを全て0として扱うことになるため、

$$X_t = \sum_{s=0}^t \frac{\Gamma(s+d)}{\Gamma(d)\Gamma(s+1)} \varepsilon_{t-s}$$

と攪乱項の有限加重和で表現できる。この定義の場合は、先ほどと異なり d の値に関係なく生成することが可能ではあるが、 $t = 0$ でモデルの構造が変化していると考えられることができるので、 $d < \frac{1}{2}$ では漸近的に定常な過程となる。このため、スペクトル密度関数は漸近的に $|f| \leq \frac{1}{2}$ において、

$$S_X(f) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{|2 \sin(\pi f)|^{2d}}$$

となる。以下の議論では、パラメータ d に関する部分と σ_ε^2 を分けて表記するために、 $\tilde{S}_X(f) = |2 \sin(\pi f)|^{-2d}$ とおく。このとき $S_X(f) = \sigma_\varepsilon^2 \tilde{S}_X(f)$ である。

このようなモデルの応用として、観測した系列がノイズを含んでいる場合、推定はさらに困難を極める。本論文では次のようなモデルも考察する。観測される系列 Y_t は

$$Y_t = X_t + u_t \quad (2)$$

で表される。ここで、 X_t は直接観測することができない系列で、(1) 式に従っている。また、 u_t はノイズの系列で、 $\rho > 0$ として

$$u_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \rho\sigma_\varepsilon^2) \quad (3)$$

に従い、 $\{X_t\}$ と $\{u_t\}$ は互いに独立であることを仮定する。

3 離散ウェーブレット変換

ウェーブレット変換は時間-周波数領域における分析手法である。特徴として、特定の条件を満たすフィルターの大きさを変えたり、平行移動させたりすることで、周波数帯ごとの時間に沿った系列を作成する。本節ではPercival and Walden (2000) における定義に従って、離散ウェーブレット変換 (Discrete Wavelet Transform, DWT) を説明する。変換に使用するフィルターは以下のように作成される。長さ L の Daubechies のウェーブレット・フィルター、 $D(L)$ の係数を $\{h_l\}_{l=0}^{L-1}$ で表し、その対となるスケーリング・フィルターを $\{g_l\}_{l=0}^{L-1}$ と表記する。このとき、 $\{g_l\}_{l=0}^{L-1}$ は $\{h_l\}_{l=0}^{L-1}$ の値から

$$g_l = (-1)^{l+1} h_{L-1-l}$$

と定義される。また、スケールのレベルを j で表し、特に $j=1$ のときには、 $h_{1,l} = h_l$ 、 $g_{1,l} = g_l$ 、 $L_1 = L$ と表記する。このとき、 $D(L)$ の実際の各フィルターの係数の値は、レベル1のウェーブレット・フィルターのパワー伝達関数

$$\mathcal{H}_{1,L}(f) = 2 \sin^L(\pi f)$$

$$\times \sum_{l=0}^{L/2-1} \binom{L/2-1+l}{l} \cos^{2l}(\pi f) \quad (4)$$

と、レベル1のスケーリング・フィルターのパワー伝達関数

$$\mathcal{G}_{1,L}(f) = 2 \cos^L(\pi f) \times \sum_{l=0}^{L/2-1} \binom{L/2-1+l}{l} \sin^{2l}(\pi f) \quad (5)$$

が満たされるように設定される。

次に、レベル2以上のレベル j におけるウェーブレット・フィルターとスケーリング・フィルターの係数を $\{h_{j,l}\}_{l=0}^{L_j-1}$ と $\{g_{j,l}\}_{l=0}^{L_j-1}$ で表すと、

$$h_{j,l} = \sum_{k=0}^{L-1} h_{1,k} g_{j-1,l-2^{j-1}k}, \quad (6)$$

$$g_{j,l} = \sum_{k=0}^{L-1} g_{1,k} g_{j-1,l-2^{j-1}k} \quad (7)$$

と計算することができる。ただし、ここで $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$ である。このように設定したウェーブレット・フィルターとスケーリング・フィルターは

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{L_j-1} h_{j,l} &= 0, & \sum_{l=0}^{L_j-1} h_{j,l}^2 &= 1, \\ \sum_{l=0}^{L_j-1} g_{j,l} &= 2^{j/2}, & \sum_{l=0}^{L_j-1} g_{j,l}^2 &= 1, \\ \sum_{l=0}^{L_j-1} g_{j,l} h_{j,l} &= 0 \end{aligned}$$

という正規直行性の性質を満たしている。

このように作成されたフィルターを使って、DWTが定義される。例えば $\{a_l\}_{l=0}^{T-1}$ の (j, k) 番目のウェーブレット係数 $W_{a,j,k}$ とスケーリング係数 $V_{a,j,k}$ は

$$W_{a,j,k} = \sum_{l=0}^{L_j-1} h_{j,l} a_{2^j(k+1)-l-1 \bmod T}, \quad (8)$$

$$V_{a,j,k} = \sum_{l=0}^{L_j-1} g_{j,l} a_{2^j(k+1)-l-1 \bmod T} \quad (9)$$

と定義される。ここで、 \bmod はデータに対してフィルターを周期的にかけける操作を表している。上の操作では、 $T-1$ 番目のデータの後に0番目からのデータを繋ぎ合わせることで計算を行っている。このように計算された係数は、レベル j のウェーブレット係数は $1/2^{j+1} \leq |f| \leq 1/2^j$ の周波数帯における時間に沿った動きを表し、同様にスケーリング係数は $0 \leq |f| \leq 1/2^{j+1}$ の動きを表す。

このような境界上の操作を行っている変換を実際の時系列データに対して用いる際には、変換後の係数の性質が境界の影響の有無により変わるため、変換による境界上の操作の影響を受けていない係数だけを考察することが重要となる。このような変換による境界上の操作を受けていない係数を本論文では非境界係数 (non-boundary coefficients) と呼ぶことにする。本論文の場合では、(8) 式と (9) 式において、 \bmod による操作の影響を受けていない係数となる。

以下の議論では、集合 \mathcal{B} を非境界係数となるウェーブレット係数の添え字 (j, k) の番号からなる集合とし、 $\mathcal{B} = \{(j, k) | j = j_1, \dots, j_2, k = L'_j, \dots, T_j - 1\}$ とおく。ここで、 $[x]$ を x より大きい最小の整数として $L'_j = \lceil (L-2)(1-2^{-j}) \rceil$ 、さらに $T_j = T/2^j$ である。同様に、特定のレベル j における非境界係数となるウェーブレット係数の添え字 k の集合を \mathcal{B}_j と表記すると、 $\mathcal{B}_j = \{k | k = L'_j, \dots, T_j - 1\}$ である。さらに、 \mathcal{J} を $\mathcal{J} = \{j | j_1, \dots, j_2\}$ として、考察で使用する j_1 から j_2 の特定のレベルの添え字 j の集合として表記する。

4 ウェーブレット解析を利用した近似最尤法

本節では、ノイズのない場合とノイズがある

場合に対して、それぞれ2つの近似最尤法について紹介する。

4.1 ノイズがない場合

4.1.1 WN近似

ウェーブレット変換後の係数列が各レベルにおいて

$$W_{X,j,k} \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, s_{X,j,0}(d)\sigma_\varepsilon^2)$$

であると近似して計算を行う。ここで、 $d < (L+1)/2$ であるならば、 $\{W_{X,j,k}\}_{k \in \mathcal{B}_j}$ は漸近的に定常過程になるので

$$s_{X,j,\tau}(d) = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Cov}(W_{X,j,k}, W_{X,j,k+\tau}) / \sigma_\varepsilon^2 \quad (10)$$

と定義できる。したがって、

$$s_{X,j,\tau}(d) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi f\tau} S_{X,j}(f) df \quad (11)$$

で計算できる。ただし、ここで

$$S_{X,j}(f) = 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathcal{H}_{j,L}(2^{-j}(f+k)) \times (2 \sin(\pi 2^{-j}(f+k)))^{-2d} \quad (12)$$

である。また、上記式での $\mathcal{H}_{j,L}(\cdot)$ はレベル j のウェーブレット・フィルターのパワー伝達関数で、使用しているフィルターが $D(L)$ の場合には、(4) 式と (5) 式から $j \geq 2$ に対して、

$$\mathcal{H}_{j,L}(f) = \mathcal{H}_{1,L}(2^{j-1}f) \prod_{l=0}^{j-2} \mathcal{G}_{1,L}(2^l f) \quad (13)$$

となる。なお、(11) 式は $\tau = 0$ の場合は、

$$s_{X,j,0}(d) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{H}_{j,L}(f) \tilde{S}_X(f) df \quad (14)$$

と表現されることが多い。

近似尤度関数は

$$L_{WN}(d, \sigma_\varepsilon^2 | \{W_{X,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}})$$

$$= \prod_{(j,k) \in \mathcal{B}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2 s_{X,j,0}(d)}} \times \exp \left\{ -\frac{W_{X,j,k}^2}{2\sigma_\varepsilon^2 s_{X,j,0}(d)} \right\}$$

となる。このとき、

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(d|\{W_{X,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}}) = \frac{1}{M} \sum_{(j,k) \in \mathcal{B}} \frac{W_{X,j,k}^2}{s_{X,j,0}(d)}$$

となる。ここで M は推定に使用している非境界ウェーブレット係数 $\{W_{X,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}}$ の数である。この式を対数尤度関数に代入して整理すると、 d の推定に関しては

$$\hat{d}_{WN} = \arg \min \tilde{\ell}_{WN}(d|\{W_{X,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}})$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}_{WN}(d|\{W_{X,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}}) &= M \log \left(\frac{1}{M} \sum_{(j,k) \in \mathcal{B}} \frac{W_{X,j,k}^2}{s_{X,j,0}(d)} \right) \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{J}} M_j \log(s_{X,j,0}(d)) \end{aligned}$$

はパラメータの数を減らした負の対数尤度関数であり、 M_j はレベル j における非境界ウェーブレット係数 $\{W_{X,j,k}\}_{k \in \mathcal{B}_j}$ の数を表す。

4.1.2 AR(1)近似

Craigmale et al. (2005) では (j, k) 番目の非境界ウェーブレット係数が

$$W_{X,j,k} = \phi_j(d)W_{X,j,k-1} + (Z_{n,b})_{j,k} \quad (15)$$

というAR(1)モデルを当てはめた近似尤度関数に推定方法を提案した。ここで、

$$(Z_{n,b})_{j,k} \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \eta_j(d)\sigma_\varepsilon^2) \quad (16)$$

であり、

$$\phi_j(d) = s_{X,j,1}(d)/s_{X,j,0}(d), \quad (17)$$

$$\eta_j(d) = s_{X,j,0}(d)(1 - \phi_j^2(d)) \quad (18)$$

であり、 $s_{X,j,0}(d)$ と $s_{X,j,1}(d)$ は (11) 式により計算できる。

AR(1)での近似尤度関数は

$$\begin{aligned} L_{AR}(d, \sigma_\varepsilon^2|\{W_{X,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}}) &= \prod_{j \in \mathcal{J}} \left(2\pi \frac{\eta_j(d)\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_j^2(d)} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{W_{X,j,L'_j}^2}{2\eta_j(d)\sigma_\varepsilon^2/(1 - \phi_j^2(d))} \right\} \\ &\quad \times (2\pi\eta_j(d)\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{M_j-1}{2}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{\sum_{k=L'_j+1}^{T_j-1} (W_{X,j,k} - \phi_j(d)W_{X,j,k-1})^2}{2\eta_j(d)\sigma_\varepsilon^2} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_\varepsilon^2(d|\{W_{X,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}}) &= \frac{1}{M} \sum_{j \in \mathcal{J}} \left[\frac{W_{X,j,L'_j}^2}{\eta_j(d)/(1 - \phi_j^2(d))} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=L'_j+1}^{T_j-1} \frac{(W_{X,j,k} - \phi_j(d)W_{X,j,k-1})^2}{\eta_j(d)} \right] \end{aligned}$$

となる。この式を対数尤度関数に代入して整理すると、 d の推定に関しては

$$\hat{d}_{AR} = \arg \min \tilde{\ell}_{AR}(d|\{W_{X,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}})$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}_{AR}(d|\{W_{X,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}}) &= M \log \left(\frac{1}{M} \sum_{j \in \mathcal{J}} \left[\frac{W_{X,j,L'_j}^2}{\eta_j(d)/(1 - \phi_j^2(d))} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=L'_j+1}^{T_j-1} \frac{(W_{X,j,k} - \phi_j(d)W_{X,j,k-1})^2}{\eta_j(d)} \right] \right) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=L'_j+1}^{T_j-1} \left. \frac{(W_{X,j,k} - \phi_j(d)W_{X,j,k-1})^2}{\eta_j(d)} \right] \Bigg) \\ + \sum_{j \in \mathcal{J}} M_j \log(\eta_j(d)) - \sum_{j \in \mathcal{J}} \log(1 - \phi_j^2(d))$$

はパラメータの数を減らした負の対数尤度関数である。

4.2 ノイズがある場合

観測した系列が(2)式に従っていることから、 (j, k) 番目のウェーブレット係数は

$$W_{Y,j,k} = W_{X,j,k} + W_{u,j,k} \quad (20)$$

となる。ここで、 $\{u_t\}$ がホワイトノイズなので、

$$W_{u,j,k} \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \rho \sigma_\varepsilon^2) \quad (21)$$

となる（詳細はNanamiya(2014)などを参照）。

4.2.1 WN近似

Tanaka (2004)では、ウェーブレット変換後の係数列が各レベルにおいて

$$W_{Y,j,k} \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2(s_{X,j,0}(d) + \rho))$$

と近似して、近似尤度関数を

$$L_{WNpN}(d, \rho, \sigma_\varepsilon^2 | \{W_{Y,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}}) \\ = \prod_{(j,k) \in \mathcal{B}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2(s_{X,j,0}(d) + \rho)}} \\ \times \exp \left\{ -\frac{W_{Y,j,k}^2}{2\sigma_\varepsilon^2(s_{X,j,0}(d) + \rho)} \right\}$$

とした。このとき、 (d, ρ) の推定値は

$$(\hat{d}_{WNpN}, \hat{\rho}_{WNpN}) \\ = \arg \min \tilde{\ell}_{WNpN}(d, \rho | \{W_{Y,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}})$$

で得られる。ここで、

$$\tilde{\ell}_{WNpN}(d, \rho | \{W_{Y,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}})$$

$$= M \log \left(\frac{1}{M} \sum_{(j,k) \in \mathcal{B}} \frac{W_{Y,j,k}^2}{s_{X,j,0}(d) + \rho} \right) \\ + \sum_{j \in \mathcal{J}} M_j \log(s_{X,j,0}(d) + \rho)$$

はパラメータの数を減らした負の対数尤度関数である。

4.2.2 ARMA(1,1)近似

Nanamiya (2011) は、(15)式のAR(1)近似を $\{W_{X,j,k}\}$ に当てはめると、

$$W_{Y,j,k} = \phi_j(d)W_{Y,j,k-1} + (Z_{n,b})_{j,k} \\ + W_{u,j,k} - \phi_j(d)W_{u,j,k-1}$$

となることから、ノイズがある場合に

$$W_{Y,j,k} = \phi_j(d)W_{Y,j,k-1} + W_{v,j,k} \\ + \beta_j(d, \rho)W_{v,j,k-1}$$

というARMA(1,1)モデルで近似する推定方法を提案した。ここで、

$$W_{v,j,k} \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \alpha_j(d, \rho)\sigma_\varepsilon^2), \\ \alpha_j(d, \rho) = \begin{cases} 1 + \rho & \text{if } \phi_j(d) = 0, \\ -\phi_j(d)\rho/\beta_j(d, \rho) & \text{if } \phi_j(d) \neq 0, \end{cases} \\ \beta_j(d, \rho) = \begin{cases} -\frac{\eta_j(d) + (1 + \phi_j^2(d))\rho}{2\phi_j(d)\rho} \\ \quad + \sqrt{\left(\frac{\eta_j(d) + (1 + \phi_j^2(d))\rho}{2\phi_j(d)\rho}\right)^2 - 1}, & \text{if } 0 < \phi_j(d) < 1, \\ 0, & \text{if } \phi_j(d) = 0, \\ -\frac{\eta_j(d) + (1 + \phi_j^2(d))\rho}{2\phi_j(d)\rho} \\ \quad - \sqrt{\left(\frac{\eta_j(d) + (1 + \phi_j^2(d))\rho}{2\phi_j(d)\rho}\right)^2 - 1}, & \text{if } -1 < \phi_j(d) < 0 \end{cases}$$

である。

このとき、近似尤度関数は

$$\begin{aligned}
L_{ARMA}(d, \rho, \sigma_\varepsilon^2 | \{W_{Y,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}}) &= \prod_{j \in \mathcal{J}} (2\pi \alpha_j(d, \rho) \sigma_\varepsilon^2)^{-M_j/2} \times \sum_{k \in \mathcal{B}_j} \frac{(W_{Y,j,k} - \widehat{W}_{Y,j,k}(d, \rho))^2}{r_{j,k-1}(d, \rho)} \\
&\quad \times \prod_{k \in \mathcal{B}_j} r_{j,k-1}^{-1/2}(d, \rho) + \sum_{j \in \mathcal{J}} M_j \log \alpha_j(d, \rho) \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha_j(d, \rho) \sigma_\varepsilon^2} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{k \in \mathcal{B}_j} \frac{(W_{Y,j,k} - \widehat{W}_{Y,j,k}(d, \rho))^2}{r_{j,k-1}(d, \rho)} \right\} + \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{k \in \mathcal{B}_j} \log r_{j,k-1}(d, \rho)
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
r_{j,k}(d, \rho) &= \begin{cases} (1 + 2\beta_j(d, \rho)\phi_j(d) \\ + \beta_j^2(d, \rho)/(1 - \phi_j^2(d)), \\ \text{if } k = L'_j - 1, \\ 1 + \beta_j^2(d, \rho) \\ - \beta_j^2(d, \rho)/r_{j,k-1}(d, \rho), \\ \text{if } k \geq L'_j, \end{cases} \\
\widehat{W}_{Y,j,k}(d, \rho) &= \begin{cases} 0, & \text{if } k = L'_j \\ \phi_j(d)W_{Y,j,k} + \beta_{j,k}(d, \rho) \\ \times (W_{Y,j,k} - \widehat{W}_{Y,j,k}(d, \rho)), \\ \text{if } k \geq L'_j + 1, \end{cases} \\
\beta_{j,k}(d, \rho) &= \beta_j(d, \rho)/r_{j,k-1}(d, \rho)
\end{aligned}$$

である。このとき、対数尤度関数から、

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_\varepsilon^2(d, \rho | \{W_{Y,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}}) &= \frac{1}{M} \sum_{j \in \mathcal{J}} \frac{1}{\alpha_j(d, \rho)} \\
&\quad \times \sum_{k \in \mathcal{B}_j} \frac{(W_{Y,j,k} - \widehat{W}_{Y,j,k}(d, \rho))^2}{r_{j,k-1}(d, \rho)}
\end{aligned}$$

となる。この式を対数尤度関数に代入して整理すると、パラメータの数を減らした負の対数尤度関数は

$$\begin{aligned}
\widetilde{\ell}_{ARMA}(d, \rho | \{W_{Y,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}}) &= M \log \left(\frac{1}{M} \sum_{j \in \mathcal{J}} \frac{1}{\alpha_j(d, \rho)} \right)
\end{aligned}$$

となる。この関数を用いて、 (d, ρ) の推定値は

$$\begin{aligned}
&(\widehat{d}_{ARMA}, \widehat{\rho}_{ARMA}) \\
&= \arg \min \widetilde{\ell}_{ARMA}(d, \rho | \{W_{Y,j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{B}})
\end{aligned}$$

で得られる。

5 シミュレーション

本節では、切断 FI(d) モデルにより生成した長期記憶過程から記憶パラメータ d の値を推定し、その挙動を考察する。本論文では一般的に使用される3つのフィルター、Haar、 $D(4)$ 、 $D(8)$ を用いて推定を行った。なお、Haarは $D(2)$ である。このときNanamiya (2014) などにあるように、 $d < (L+1)/2$ という条件を満たすときに非境界ウェーブレット係数が定常過程になることから、各フィルターの使用可能範囲は、Haarは $d < 1.5$ 、 $D(4)$ は $d < 2.5$ 、 $D(8)$ は $d < 4.5$ となる。一方で、フィルターが長くなるほど、各レベルにおいて推定に使用できる非境界係数の数が減少する。

比較する推定手法は、ノイズがない場合は4.1節で紹介したWN近似とAR(1)近似、ノイズがある場合は4.2節で紹介したWN近似とARMA近似を用いる。さらに、WN近似を用いる際には、フィルターのパワー伝達関数を理想的なバンドパス・フィルターに置き換えて数値積分により評価したものと、それぞれのフィルターのパワー伝達関数を用いて数値積分により評価したものの2つを用いた。バンドパス・フィルターとはパワー伝達関数 $\mathcal{H}_{j,L}(f)$ を

$$\mathcal{H}_{j,ID}(f) = \begin{cases} 2^j, & \text{if } 1/2^{j+1} \leq f \leq 1/2^j, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

に置き換えたものである。Craigmile et al.(2005)では $L \rightarrow \infty$ のときに $D(L)$ がバンドパス・フィルターになることを示しており、使用するフィルターの長さ L が大きくなるほどに結果が良くなることが予想される。また、バンドパス・フィルターを使用する場合は、積分範囲に関数が発散する原点が含まれないため、安定的に積分可能となる。このため、バンドパス・フィルターを用いた場合は、上述のフィルターごとの使用可能範囲を無視して推定値を計算することが可能となる。

シミュレーションにおけるパラメータの設定はTanaka(2004)と同じものを採用した。具体的には、Case 1は $(d, \rho) = (0.1, 0.1)$ 、Case 2は $(d, \rho) = (0.3, 0.16)$ 、Case 3は $(d, \rho) = (0.45, 0.5)$ 、Case 4は $(d, \rho) = (0.6, 1.5)$ 、Case 5は $(d, \rho) = (0.8, 10)$ 、Case 6は $(d, \rho) = (1.0, 100)$ 、Case 7は $(d, \rho) = (1.2, 1000)$ 、Case 8は $(d, \rho) = (1.4, 10000)$ 、Case 9は $(d, \rho) = (1.6, 100000)$ 、Case 10は $(d, \rho) = (1.8, 900000)$ とし、各ケースにおいて $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ としている。また、ノイズがない場合には $\rho = 0$ である。さらに、系列の長さを $T = 512, 1024, 2048$ の3種類とし、各1000系列使用した。使用するレベルは、 $\mathcal{J} = \{j : 2, 3, \dots, 6\}$ と固定した。 d のパラメータ空間は、ノイズがない場合は $[-3, 3]$ 、ノイズがある場合は $(0, 3)$ として推定を行った。なお、本論文のシミュレーションにおけるデータの生成、推定および結果の集計作業はOx ver. 7.10 (詳細はDoornik(2013)参照)により行った。また、図はR ver. 3.2.4により作成した。

表1から表6は、各手法で推定した \hat{d} の平均(mean)、標準偏差(stdv)、推定に成功した系列の数(N)をまとめたものである。なお、一回も推定に成功していない場合は空欄としている。また、図1から図6は、 $T = 2048$ の場合の各手法、各フィルターの \hat{d} の推定値のヒストグラムをまとめたものである。

5.1 ノイズがない場合

表1は、WN近似の積分の評価で(22)式を使用した推定法(WNID)での \hat{d}_{WN} の結果である。Haarでは全体的に下方バイアスがみられた。また、バンドパス・フィルターを使用しているた

め、Haarの使用可能範囲外である $d > 1.5$ のケースにおいても推定値は求まるが、その結果は急激に悪化している。一方で、全体的に $D(8)$ の結果が良くなった。これは前述したように L が大きくなるほど、バンドパス・フィルターによる評価に近い値を取るようになるからだと考えられる。Case 1からCase 7までは T が大きくなるほど良くなる傾向がみられるが、 $D(4)$ と $D(8)$ のCase 8からCase 10では上方バイアスの傾向がみられた。

表2は、WN近似の積分の評価で(13)式を使用した推定法(WNQN)での \hat{d}_{WN} の結果である。HaarについてはCase 9とCase 10で積分による評価ができなくなるため、推定不可となった。Case 4からCase 6では $D(4)$ が比較的良く、その他の場合は $D(8)$ が比較的良いという傾向がみられた。

表3は、(13)式を使用したAR(1)による推定法(ARQN)の結果である。WNQNと同様に、HaarはCase 9とCase 10で推定不可となった。 $D(4)$ や $D(8)$ の方が全体的に良い結果がでている。

ノイズがない場合は、推定可能な範囲であれば各推定手法のヒストグラムは真の値の近くで最頻値となる単峰型をしていたため、それらの図の掲載は省略した。その代りとして、特徴的な結果としてCase 10のヒストグラムを図1として掲載した。Case 10の場合は $d = 1.8$ であり、WNIDのHaarは推定はできるが図1の左下にあるように推定可能な上限の1.5の周辺に集中する結果となった。中段の $D(4)$ の各手法の結果はやや上方バイアスをもつような傾向があり、ヒストグラムの形状からそのバイアスの影響はAR(1)近似による方法が一番小さいようである。また、 $D(8)$ の各手法は $d = 1.8$ の付近で頂点を持つような結果となっており、形状からするとAR(1)近似による手法が他の手法よりも良い結果となっていることがわかる。

5.2 ノイズがある場合

全体的にノイズの影響を受けて結果が不安定になる傾向がみられ、推定不可になる場合や、理論的には推定できないと考えられる場合にも結果が出たり、標準偏差がノイズがない場合と

比較して大きくなる傾向があった。また、全体的に上方バイアスの傾向が見られた。このような傾向、特にCase 6 からCase 10の結果は、表だけでは判断ができないため、図 2 から図 6 として各ヒストグラムを掲載した。

表 4 は、WN 近似の積分の評価で (22) 式を使用した推定法 (WNpNID) での \hat{d}_{WNpN} の結果をまとめたものである。推定結果が出た個数は 1000 と安定的に結果は出るが、その値は不安定であり、ノイズが大きくなるについて平均が真の値から離れる傾向がある。また、フィルターが長くなると結果が良くなるという事はなかった。図 5 によると、Case 9 の場合はフィルターに関係なく安定的に推定できているようだ。

表 5 は、WN 近似の積分の評価で (13) 式を使用した推定法 (WNpNQN) での \hat{d}_{WNpN} の結果をまとめたものである。ノイズがない場合には Haar は $d \geq 1.5$ の値は推定できなかったが、今回は Case 9 と Case 10 においても推定結果が得られた。図 5 でもわかるように、 $D(4)$ の Case 9 の結果において 2.5 付近に結果が集中した。また、図 4 より、Case 8 の Haar のときに真の値の周辺に推定結果が最も集中した。

表 6 は、(13) 式を使用した ARMA (1,1) による推定法 (ARMAQN) の結果である。Haar については、ノイズがない場合と同様に Case 9 と Case 10 の結果が出なかったため、空欄となっている。図 2 と図 3 によると、Case 6 と Case 7 の場合はヒストグラムの形状から ARMA 近似の Haar の結果が良いということがわかる。

Case 10 の各推定手法の結果のヒストグラムである図 6 をみると、 $D(4)$ と $D(8)$ では $d = 0$ の周辺が異常に高くなった。これは、長期記憶過程による変動がノイズによって吸収されたためと考えられる。

6 結論と今後の課題

本論文では、長期記憶過程の一種である切断 FI (d) モデルのパラメータ推定についてウェーブレット解析を用いた近似最尤法のシミュレーションによる研究を行い、AR (1) 近似による推定手法が

比較的良好な結果になった。また、フィルターが長い方が結果が良い傾向がみられた。さらに、本論文では応用問題として、切断 FI (d) モデルにノイズが加わった場合のパラメータ推定のシミュレーション研究を行った。この場合は、ノイズがない場合と異なり、記憶パラメータ d とノイズのパラメータ ρ の値の組合せによって、適切な手法が変わるという傾向が見られた。このため、今後の課題として d と ρ の推定に関する理論的な解明が必要であると考えられる。

(2017年 5月31日受付、2017年 7月14日受理)

謝 辞

有益なコメントを頂いたことに対して匿名の査読者に感謝する。

参考文献

(日本語文献)

田中勝人(2006),『現代時系列解析』, 岩波書店

(外国語文献)

Bardet J. M. (2002), Statistical Study of the Wavelet Analysis of Fractional Brownian Motion, *IEEE Transactions on Information Theory*, **48**, pp.991-999.

Bardet J. M, Lang, G., Moulines. E. and Soulier, P. (2000), Wavelet Estimator of Long-Range Dependent Processes, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **3**, pp.85-99.

Breidt, J., Crato, N. and de Lima, P. (1998), On the Detection and Estimation of Long Memory in Stochastic Volatility, *Journal of Econometrics*, **83**, pp.325-348.

Craigmile, P. F., Guttorp, P. and Percival, D. B. (2005), Wavelet-Based Parameter Estimation for Polynomial Contaminated Fractionally Differenced Processes, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **53**, pp.3151-3161.

- Deo, R. S., and Hurvich, C. M. (2003), Estimation of Long-Memory in Volatility, *Long-Range Dependence: Theory and Applications*, ed. by Doukhan, P., Oppenheim, G. and Taqqu, M. S., pp. 313-324. Birkhauser, Boston.
- Doornik, J. (2013), *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox*, London, Timberlake Consultants Press and Oxford: www.doornik.com.
- Fay, G., Moulines, E., Roueff, F. and Taqqu, M. S. (2009), Estimators of Long-Memory: Fourier Versus Wavelets, *Journal of Econometrics*, **151**, pp.159-177.
- Hurvich, C. M. and Ray, B. K.(1995), Estimation of the Memory Parameter for Nonstationary or Noninvertible Fractionally Integrated Processes. *Journal of Time Series Analysis* **16**, pp.17-41.
- Kaplan, L. M. and Kuo, C.-C. J. (1993), Fractal Estimation from Noisy Data via Discrete Fractional Gaussian Noise (DFGN) and the Haar Basis, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **41**, pp.3554-3564.
- McCoy, E. J. and Walden, A. T. (1996), Wavelet Analysis and Synthesis of Stationary Long-Memory Processes. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **5**, pp.26-56.
- Moulines, E., Roueff, F. and Taqqu, M. S. (2007), On the Spectral Density of the Wavelet Coefficients of Long Memory Time Series with Application to the Log-Regression Estimation of the Memory Parameter, *Journal of Time Series Analysis*, **28**, pp.155-187.
- Moulines, E., Roueff, F. and Taqqu, M. S. (2008), A Wavelet Whittle Estimator of the Memory Parameter of a Non-Stationary Gaussian Time Series, *The Annals of Statistics*, **36**, pp.1925-1956.
- Nanamiya, K. (2011), The Wavelet-based Estimation for Long Memory Signal Plus Noise Models, *Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series*, No.210, Hitotsubashi University.
- Nanamiya, K. (2014), Modelling for the Wavelet Coefficients of ARFIMA Processes, *Journal of Time Series Analysis*, **35**, pp.341-356.
- Tanaka, K. (2004), Frequency Domain and Wavelet-based Estimation for Long Memory Signal Plus Noise Models, *State Space and Unobserved Component Models Theory and Applications*, ed. by A. Harvey, S. J. Koopman, and N. Shephard, pp.75-91. Cambridge University Press, Cambridge.
- Percival, D. B. and Walden, A. T. (2000), *Wavelet Methods for Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Roueff, F. and Taqqu, M. S.(2009), Asymptotic normality of wavelet estimators of the memory parameter for linear processes. *Journal of Time Series Analysis*, **30**, pp.534-558.
- Wornell, G. W. and Oppenheim, A. V. (1992), Estimation of Fractional Signals from Noisy Measurements using Wavelets, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **40**, pp.611-623.
- Zhang, L., Bao, P. and Wu, X. (2004), Wavelet Estimation of Fractional Brownian Motion Embedded in a Noisy Environment, *IEEE Transactions on Information Theory*, **50**, pp.2194-2200.

Noiseless	filter	Haar			D4			D8		
WNID	size	512	1024	2048	512	1024	2048	512	1024	2048
Case 1 d = 0.1	mean	0.0892	0.0904	0.0918	0.0928	0.0958	0.0984	0.0989	0.0975	0.1001
	stdv	0.0608	0.0439	0.0309	0.0679	0.0468	0.0313	0.0770	0.0485	0.0327
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 2 d = 0.3	mean	0.2762	0.2792	0.2811	0.2888	0.2924	0.2950	0.2970	0.2961	0.2992
	stdv	0.0629	0.0449	0.0315	0.0681	0.0474	0.0318	0.0778	0.0485	0.0329
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 3 d = 0.45	mean	0.4225	0.4265	0.4288	0.4376	0.4415	0.4441	0.4459	0.4455	0.4490
	stdv	0.0639	0.0460	0.0319	0.0685	0.0479	0.0327	0.0795	0.0491	0.0332
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 4 d = 0.6	mean	0.5727	0.5775	0.5800	0.5876	0.5918	0.5943	0.5950	0.5953	0.5991
	stdv	0.0645	0.0469	0.0322	0.0692	0.0488	0.0340	0.0820	0.0503	0.0336
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 5 d = 0.8	mean	0.7779	0.7835	0.7861	0.7890	0.7933	0.7960	0.7948	0.7956	0.7998
	stdv	0.0648	0.0473	0.0325	0.0708	0.0505	0.0362	0.0856	0.0523	0.0344
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 6 d = 1	mean	0.9868	0.9937	0.9962	0.9918	0.9959	0.9989	0.9956	0.9968	1.0010
	stdv	0.0656	0.0470	0.0330	0.0729	0.0520	0.0381	0.0885	0.0543	0.0353
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 7 d = 1.2	mean	1.1911	1.2018	1.2060	1.1952	1.1995	1.2028	1.1974	1.1986	1.2026
	stdv	0.0675	0.0484	0.0349	0.0759	0.0530	0.0390	0.0906	0.0564	0.0365
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 8 d = 1.4	mean	1.3621	1.3791	1.3892	1.3994	1.4039	1.4076	1.3992	1.4007	1.4046
	stdv	0.0617	0.0463	0.0355	0.0780	0.0535	0.0389	0.0926	0.0589	0.0385
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 9 d = 1.6	mean	1.4662	1.4824	1.4934	1.6048	1.6096	1.6134	1.6006	1.6029	1.6068
	stdv	0.0414	0.0299	0.0216	0.0774	0.0534	0.0379	0.0950	0.0620	0.0411
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 10 d = 1.8	mean	1.5117	1.5214	1.5274	1.8118	1.8168	1.8203	1.8020	1.8051	1.8093
	stdv	0.0221	0.0138	0.0081	0.0747	0.0522	0.0365	0.0967	0.0646	0.0433
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

表 1 : WNIDによる \hat{d} の結果。平均(mean)、標準偏差(stdv)、推定に成功した推定値の個数(N)

Noiseless	filter	Haar			D4			D8		
WNQN	size	512	1024	2048	512	1024	2048	512	1024	2048
Case 1 d = 0.1	mean	0.0976	0.0996	0.1013	0.0952	0.0985	0.1012	0.0996	0.0982	0.1008
	stdv	0.0664	0.0478	0.0335	0.0698	0.0481	0.0321	0.0776	0.0489	0.0329
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 2 d = 0.3	mean	0.2953	0.2986	0.3007	0.2948	0.2983	0.3010	0.2987	0.2977	0.3007
	stdv	0.0649	0.0462	0.0323	0.0688	0.0478	0.0321	0.0780	0.0486	0.0329
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 3 d = 0.45	mean	0.4437	0.4478	0.4502	0.4444	0.4482	0.4507	0.4478	0.4472	0.4506
	stdv	0.0641	0.0461	0.0319	0.0686	0.0480	0.0327	0.0795	0.0491	0.0331
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 4 d = 0.6	mean	0.5926	0.5973	0.5997	0.5940	0.5980	0.6004	0.5967	0.5968	0.6006
	stdv	0.0633	0.0460	0.0315	0.0688	0.0485	0.0338	0.0818	0.0502	0.0335
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 5 d = 0.8	mean	0.7917	0.7971	0.7995	0.7935	0.7976	0.8002	0.7956	0.7963	0.8005
	stdv	0.0622	0.0453	0.0311	0.0698	0.0498	0.0357	0.0852	0.0520	0.0343
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 6 d = 1	mean	0.9907	0.9971	0.9994	0.9930	0.9970	0.9999	0.9951	0.9962	1.0004
	stdv	0.0617	0.0443	0.0310	0.0715	0.0509	0.0373	0.0878	0.0539	0.0350
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 7 d = 1.2	mean	1.1820	1.1919	1.1959	1.1921	1.1963	1.1996	1.1949	1.1963	1.2004
	stdv	0.0624	0.0447	0.0323	0.0740	0.0517	0.0380	0.0896	0.0558	0.0361
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 8 d = 1.4	mean	1.3401	1.3556	1.3648	1.3908	1.3954	1.3991	1.3943	1.3962	1.4002
	stdv	0.0564	0.0423	0.0324	0.0757	0.0519	0.0377	0.0914	0.0582	0.0380
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 9 d = 1.6	mean				1.5899	1.5948	1.5986	1.5929	1.5958	1.5999
	stdv				0.0747	0.0516	0.0367	0.0935	0.0611	0.0405
	N				1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 10 d = 1.8	mean				1.7895	1.7949	1.7984	1.7910	1.7950	1.7996
	stdv				0.0718	0.0502	0.0351	0.0950	0.0635	0.0427
	N				1000	1000	1000	1000	1000	1000

表 2 : WNQNによる \hat{d} の結果。平均(mean)、標準偏差(stdv)、推定に成功した推定値の個数(N)

Noiseless	filter	Haar			D4			D8		
ARQN	size	512	1024	2048	512	1024	2048	512	1024	2048
Case 1 d = 0.1	mean	0.0984	0.1005	0.1018	0.0971	0.1000	0.1016	0.1014	0.0989	0.1011
	stdv	0.0640	0.0461	0.0326	0.0651	0.0453	0.0308	0.0728	0.0468	0.0311
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 2 d = 0.3	mean	0.2971	0.3000	0.3012	0.2981	0.3004	0.3016	0.3022	0.2990	0.3013
	stdv	0.0616	0.0440	0.0313	0.0645	0.0447	0.0303	0.0728	0.0465	0.0312
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 3 d = 0.45	mean	0.4457	0.4492	0.4506	0.4487	0.4506	0.4516	0.4526	0.4491	0.4514
	stdv	0.0608	0.0437	0.0307	0.0642	0.0445	0.0302	0.0734	0.0464	0.0313
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 4 d = 0.6	mean	0.5939	0.5980	0.6000	0.5992	0.6008	0.6015	0.6031	0.5993	0.6015
	stdv	0.0611	0.0442	0.0306	0.0638	0.0444	0.0307	0.0743	0.0465	0.0314
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 5 d = 0.8	mean	0.7916	0.7968	0.7996	0.7992	0.8006	0.8014	0.8038	0.7996	0.8016
	stdv	0.0628	0.0454	0.0313	0.0638	0.0450	0.0320	0.0752	0.0467	0.0314
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 6 d = 1	mean	0.9907	0.9968	0.9998	0.9978	0.9998	1.0010	1.0046	1.0001	1.0018
	stdv	0.0652	0.0461	0.0322	0.0650	0.0461	0.0338	0.0756	0.0469	0.0314
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 7 d = 1.2	mean	1.1852	1.1933	1.1968	1.1946	1.1980	1.2001	1.2052	1.2007	1.2020
	stdv	0.0637	0.0451	0.0321	0.0676	0.0474	0.0352	0.0756	0.0473	0.0314
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 8 d = 1.4	mean	1.3475	1.3603	1.3674	1.3902	1.3957	1.3989	1.4049	1.4011	1.4020
	stdv	0.0534	0.0406	0.0309	0.0701	0.0487	0.0356	0.0756	0.0481	0.0319
	N	986	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 9 d = 1.6	mean				1.5868	1.5940	1.5979	1.6032	1.6010	1.6019
	stdv				0.0713	0.0497	0.0353	0.0763	0.0497	0.0332
	N				1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 10 d = 1.8	mean				1.7868	1.7942	1.7981	1.8000	1.8002	1.8016
	stdv				0.0710	0.0491	0.0343	0.0777	0.0520	0.0352
	N				1000	1000	1000	1000	1000	1000

表 3 : ARQNによる \hat{d} の結果。平均(mean)、標準偏差(stdv)、推定に成功した推定値の個数(N)

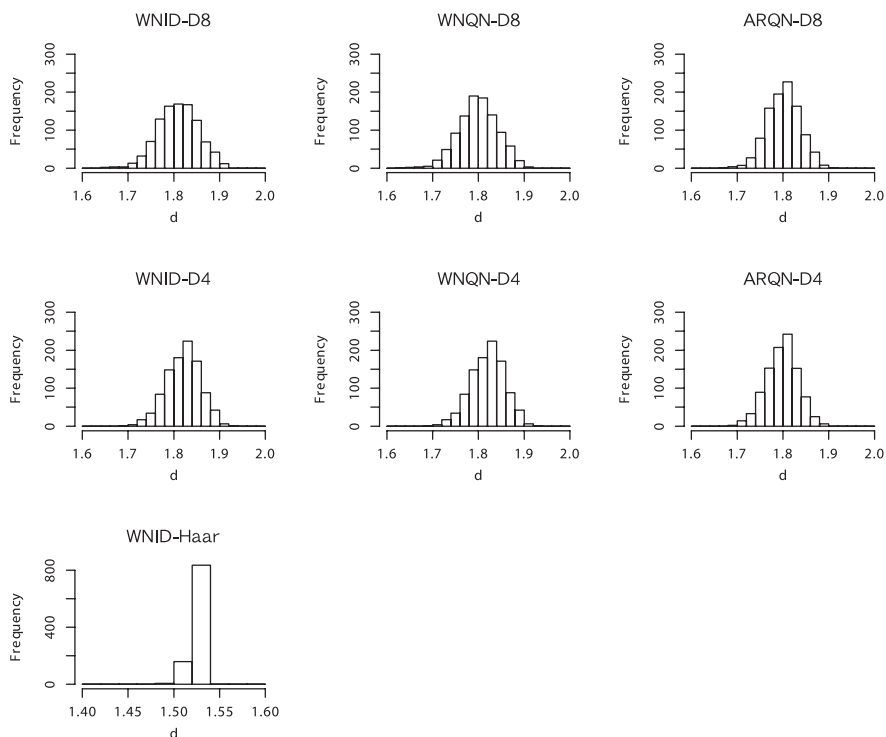


図 1 : Case10の \hat{d} のヒストグラム。 $d = 1.8$ 。

Noise	filter	Haar			D4			D8		
WNpNID	size	512	1024	2048	512	1024	2048	512	1024	2048
Case 1 d = 0.1 $\rho = 0.1$	mean	0.1148	0.1170	0.1197	0.1180	0.1217	0.1252	0.1282	0.1234	0.1263
	stdv	0.0784	0.0658	0.0531	0.0854	0.0682	0.0556	0.0957	0.0703	0.0560
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 2 d = 0.3 $\rho = 0.16$	mean	0.3175	0.3219	0.3272	0.3295	0.3291	0.3295	0.3429	0.3346	0.3341
	stdv	0.0990	0.0867	0.0796	0.1076	0.0883	0.0781	0.1196	0.0931	0.0783
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 3 d = 0.45 $\rho = 0.5$	mean	0.4522	0.4553	0.4595	0.4552	0.4566	0.4582	0.4712	0.4629	0.4612
	stdv	0.1242	0.1082	0.0973	0.1301	0.1130	0.0973	0.1517	0.1217	0.0999
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 4 d = 0.6 $\rho = 1.5$	mean	0.5716	0.5875	0.5964	0.5728	0.5802	0.5894	0.5732	0.5830	0.5947
	stdv	0.1641	0.1386	0.1144	0.1782	0.1518	0.1190	0.1943	0.1602	0.1224
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 5 d = 0.8 $\rho = 10$	mean	0.7462	0.7829	0.7986	0.7175	0.7662	0.7901	0.6778	0.7508	0.7889
	stdv	0.2300	0.1943	0.1485	0.2505	0.2075	0.1656	0.3012	0.2310	0.1694
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 6 d = 1 $\rho = 100$	mean	0.8697	0.9452	1.0051	0.7583	0.8793	0.9640	0.6418	0.8304	0.9592
	stdv	0.3579	0.2933	0.2446	0.4117	0.3414	0.2790	0.4811	0.3759	0.2951
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 7 d = 1.2 $\rho = 1000$	mean	1.0229	1.1019	1.1721	0.8369	0.9351	1.0445	0.6933	0.8558	0.9850
	stdv	0.4831	0.4497	0.4003	0.5493	0.5059	0.4816	0.5877	0.5352	0.4995
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 8 d = 1.4 $\rho = 10000$	mean	1.4125	1.5474	1.6485	0.9506	1.0425	1.1943	0.8395	0.9126	1.0309
	stdv	0.5964	0.4369	0.2441	0.7570	0.6948	0.5827	0.7785	0.7192	0.6520
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 9 d = 1.6 $\rho = 100000$	mean	1.4637	1.4800	1.4914	1.6176	1.6134	1.6114	1.6312	1.6146	1.6092
	stdv	0.0430	0.0310	0.0225	0.0996	0.0693	0.0517	0.1391	0.0906	0.0626
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 10 d = 1.8 $\rho = 900000$	mean	1.8039	2.1323	2.4000	1.2118	1.2349	1.2758	1.1315	1.1835	1.2264
	stdv	1.0286	0.8037	0.5099	1.1044	1.0747	1.0390	1.1228	1.0761	1.0450
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

表 4 : WNpIDによる \hat{d} の結果。平均(mean)、標準偏差(stdv)、推定に成功した推定値の個数(N)

Noise	filter	Haar			D4			D8		
WNpNQN	size	512	1024	2048	512	1024	2048	512	1024	2048
Case 1 d = 0.1 $\rho = 0.1$	mean	0.1233	0.1257	0.1273	0.1202	0.1241	0.1272	0.1288	0.1240	0.1267
	stdv	0.0822	0.0693	0.0551	0.0868	0.0691	0.0565	0.0960	0.0706	0.0561
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 2 d = 0.3 $\rho = 0.16$	mean	0.3281	0.3299	0.3331	0.3322	0.3307	0.3303	0.3437	0.3351	0.3340
	stdv	0.0968	0.0833	0.0760	0.1066	0.0871	0.0767	0.1193	0.0927	0.0779
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 3 d = 0.45 $\rho = 0.5$	mean	0.4572	0.4575	0.4590	0.4558	0.4560	0.4564	0.4711	0.4626	0.4607
	stdv	0.1167	0.1012	0.0920	0.1271	0.1105	0.0955	0.1503	0.1209	0.0992
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 4 d = 0.6 $\rho = 1.5$	mean	0.5688	0.5840	0.5931	0.5703	0.5776	0.5865	0.5719	0.5820	0.5938
	stdv	0.1523	0.1325	0.1124	0.1735	0.1496	0.1185	0.1920	0.1590	0.1223
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 5 d = 0.8 $\rho = 10$	mean	0.7254	0.7674	0.7921	0.7086	0.7590	0.7864	0.6737	0.7477	0.7875
	stdv	0.2097	0.1804	0.1415	0.2430	0.2020	0.1630	0.2969	0.2281	0.1682
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 6 d = 1 $\rho = 100$	mean	0.8188	0.8992	0.9692	0.7407	0.8617	0.9488	0.6350	0.8235	0.9523
	stdv	0.3151	0.2512	0.2069	0.3959	0.3262	0.2646	0.4735	0.3699	0.2886
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 7 d = 1.2 $\rho = 1000$	mean	0.9417	0.9992	1.0780	0.8094	0.9051	1.0040	0.6803	0.8454	0.9718
	stdv	0.3987	0.3660	0.3031	0.5211	0.4784	0.4518	0.5748	0.5239	0.4902
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 8 d = 1.4 $\rho = 10000$	mean	1.1425	1.2512	1.3354	0.8969	0.9822	1.1294	0.8188	0.8891	1.0090
	stdv	0.4664	0.3375	0.1672	0.7073	0.6545	0.5494	0.7574	0.7038	0.6375
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 9 d = 1.6 $\rho = 100000$	mean	1.9564	2.1970	2.2233	2.4477	2.4981	2.4998	1.6271	1.6112	1.6063
	stdv	0.4754	0.4969	0.5016	0.2132	0.0340	0.0001	0.1396	0.0913	0.0635
	N	595	720	858	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 10 d = 1.8 $\rho = 900000$	mean	1.8288	1.7936	1.8539	1.0833	1.1072	1.1468	1.0855	1.1375	1.1748
	stdv	0.5249	0.5880	0.6802	0.9726	0.9544	0.9292	1.0718	1.0314	1.0054
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

表 5 : WNpQNによる \hat{d} の結果。平均(mean)、標準偏差(stdv)、推定に成功した推定値の個数(N)

Noise	filter	Haar			D4			D8		
ARMAQN	size	512	1024	2048	512	1024	2048	512	1024	2048
Case 1 $d = 0.1$ $\rho = 0.1$	mean	0.1238	0.1257	0.1264	0.1222	0.1244	0.1264	0.1314	0.1259	0.1278
	stdv	0.0814	0.0660	0.0551	0.0839	0.0672	0.0549	0.0975	0.0697	0.0545
	N	996	996	1000	991	999	1000	995	999	999
Case 2 $d = 0.3$ $\rho = 0.16$	mean	0.3272	0.3268	0.3268	0.3321	0.3277	0.3277	0.3457	0.3365	0.3328
	stdv	0.0966	0.0830	0.0736	0.1027	0.0854	0.0754	0.1196	0.0918	0.0756
	N	998	1000	999	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 3 $d = 0.45$ $\rho = 0.5$	mean	0.4518	0.4519	0.4524	0.4520	0.4508	0.4506	0.4667	0.4612	0.4604
	stdv	0.1176	0.1024	0.0895	0.1255	0.1059	0.0899	0.1474	0.1153	0.0918
	N	1000	1000	1000	999	1000	1000	1000	998	1000
Case 4 $d = 0.6$ $\rho = 1.5$	mean	0.5698	0.5838	0.5950	0.5664	0.5802	0.5869	0.5713	0.5822	0.5929
	stdv	0.1531	0.1306	0.1052	0.1690	0.1383	0.1084	0.1909	0.1501	0.1107
	N	999	1000	1000	1000	1000	1000	999	1000	1000
Case 5 $d = 0.8$ $\rho = 10$	mean	0.7370	0.7737	0.7953	0.7173	0.7613	0.7851	0.6809	0.7538	0.7910
	stdv	0.2027	0.1680	0.1266	0.2375	0.1962	0.1561	0.2965	0.2156	0.1569
	N	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Case 6 $d = 1$ $\rho = 100$	mean	0.8477	0.9192	0.9720	0.7495	0.8631	0.9491	0.6537	0.8360	0.9550
	stdv	0.2935	0.2349	0.1702	0.3903	0.3153	0.2633	0.4467	0.3580	0.2719
	N	1000	1000	1000	999	1000	1000	993	1000	1000
Case 7 $d = 1.2$ $\rho = 1000$	mean	0.9472	1.0618	1.1447	0.8196	0.9207	1.0133	0.6888	0.8372	0.9805
	stdv	0.3985	0.3171	0.2274	0.5182	0.4764	0.4358	0.5680	0.5123	0.4734
	N	998	1000	1000	997	997	1000	989	994	997
Case 8 $d = 1.4$ $\rho = 10000$	mean	1.1279	1.2279	1.3107	0.9167	1.0037	1.1260	0.8201	0.9071	1.0357
	stdv	0.4473	0.3377	0.2190	0.7017	0.6383	0.5477	0.7575	0.6864	0.6115
	N	1000	1000	1000	992	997	994	992	992	996
Case 9 $d = 1.6$ $\rho = 100000$	mean				1.6638	1.7172	1.7668	1.7697	1.8827	1.9573
	stdv				0.2386	0.2958	0.3351	0.4743	0.5425	0.5788
	N				971	881	898	823	853	803
Case 10 $d = 1.8$ $\rho = 900000$	mean				1.1032	1.1639	1.1985	1.0579	1.0879	1.1549
	stdv				0.9552	0.9305	0.9062	1.0610	1.0053	0.9669
	N				1000	1000	1000	1000	1000	1000

表 6 : ARMAQNによる \hat{d} の結果。平均(mean)、標準偏差(stdv)、推定に成功した推定値の個数(N)

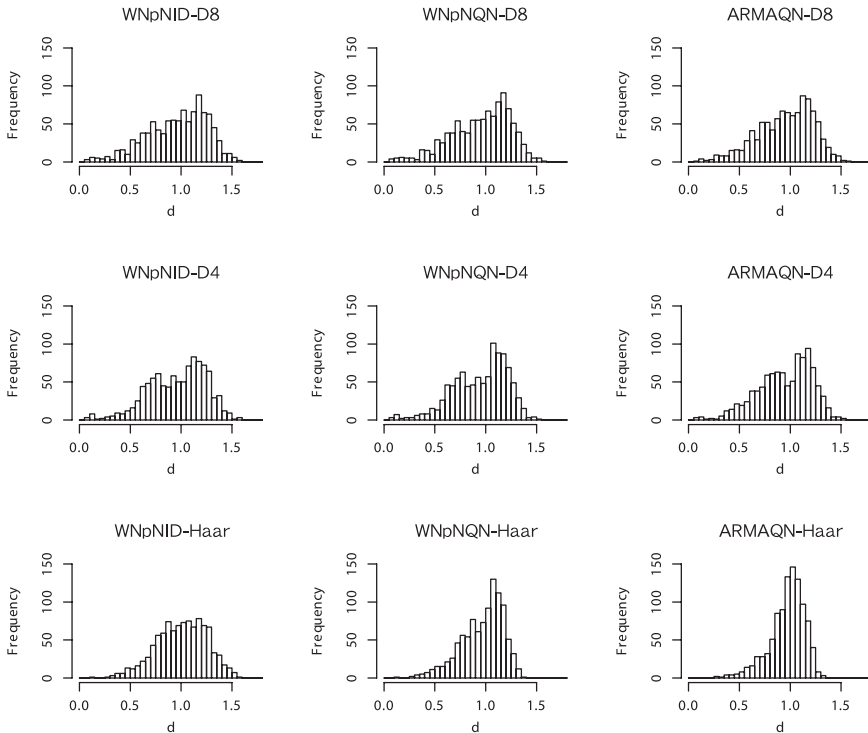


図 2 : ノイズがある場合のCase 6 の \hat{d} のヒストグラム。(d, ρ) = (1, 100)。

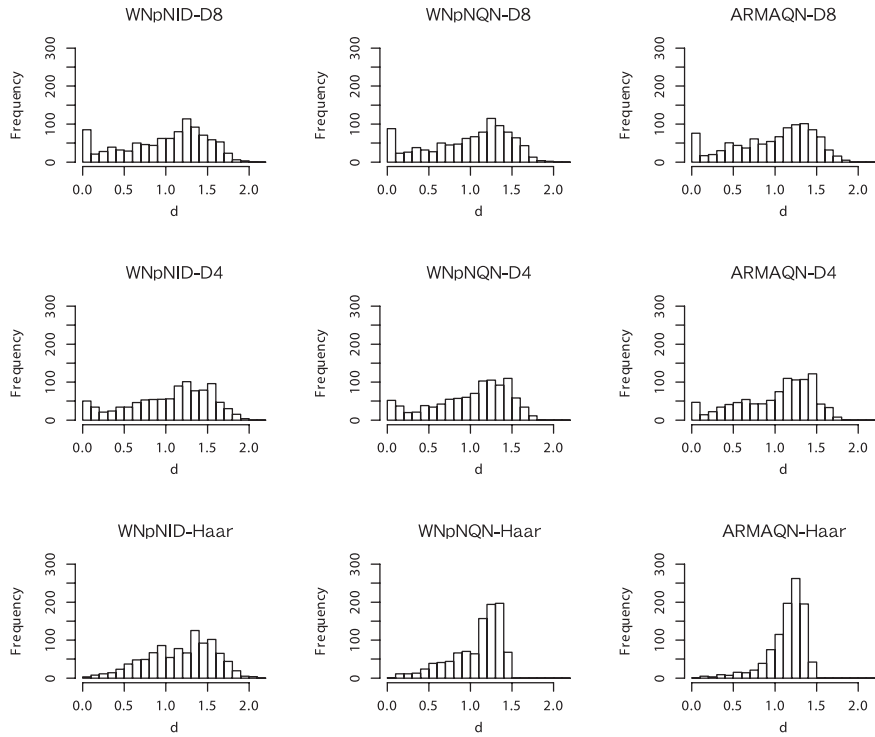


図 3 : ノイズがある場合のCase 7 の \hat{d} のヒストグラム。 $(d, \rho) = (1.2, 1000)$ 。

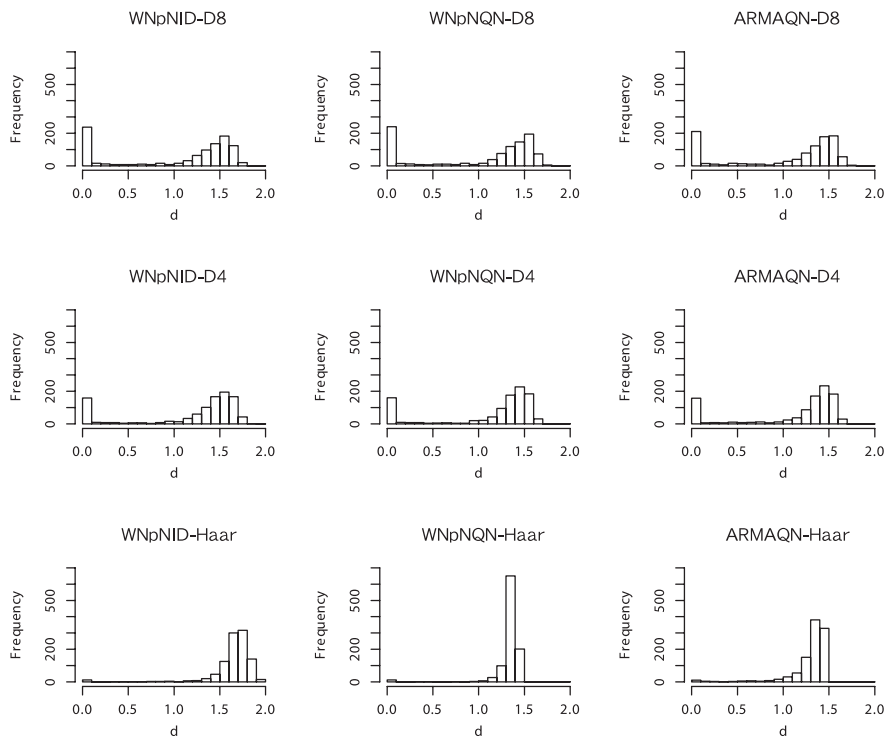


図 4 : ノイズがある場合のCase 8 の \hat{d} のヒストグラム。 $(d, \rho) = (1.4, 10000)$ 。

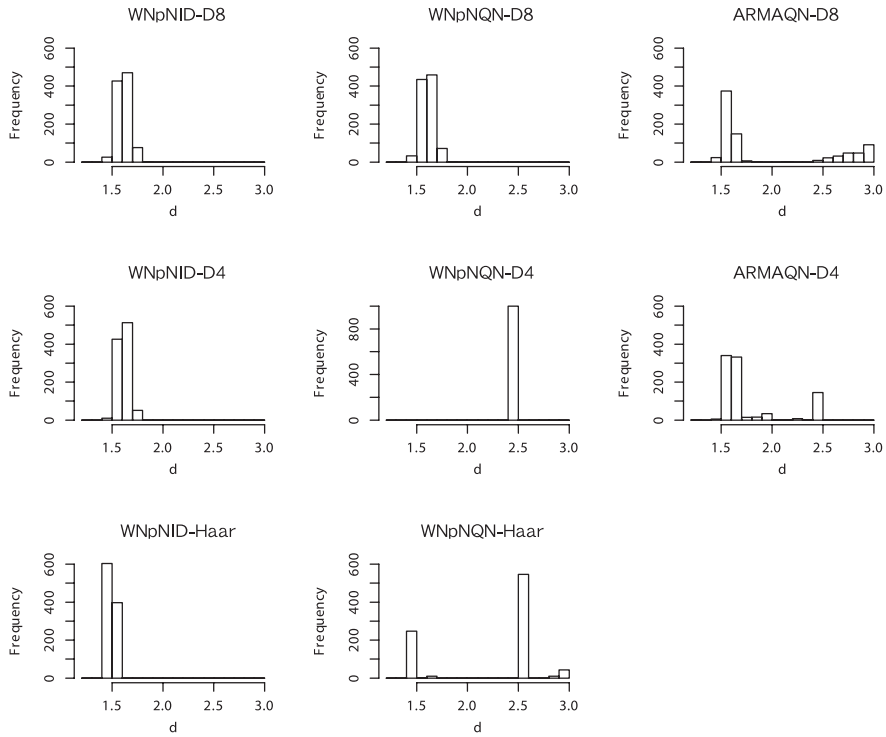


図 5 : ノイズがある場合のCase 9 の \hat{d} のヒストグラム。 $(d, \rho) = (1.6, 100000)$ 。

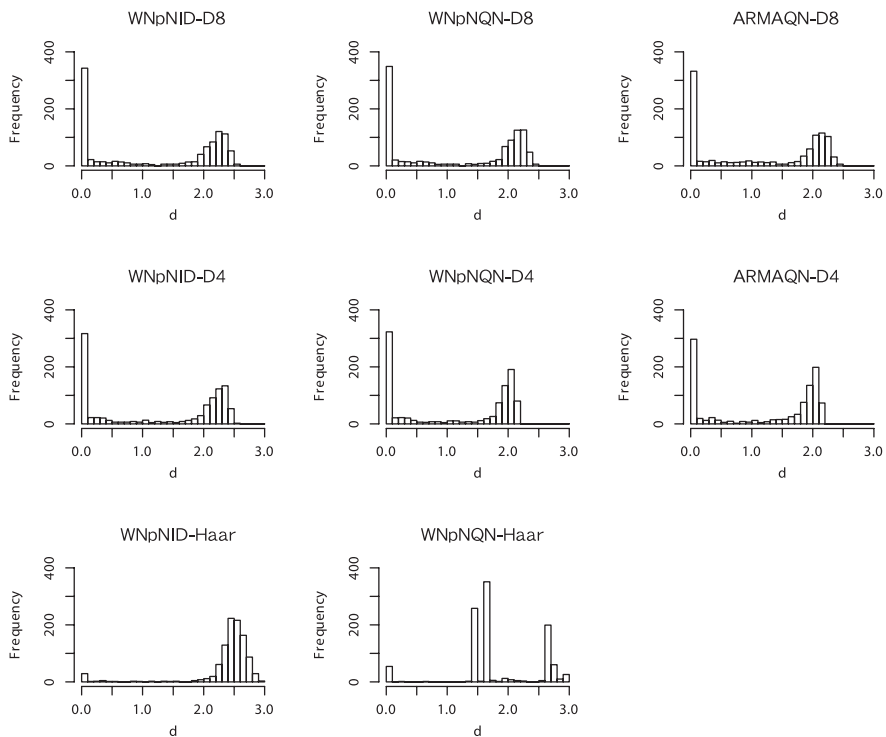


図 6 : ノイズがある場合のCase 10 の \hat{d} のヒストグラム。 $(d, \rho) = (1.8, 900000)$ 。

A Simulation Study of the Wavelet-based Approximate Maximum Likelihood Estimation Methods for Long-Memory

Kei NANAMIYA

Abstract

In this article, we compare the performances of the wavelet-based approximated maximum likelihood estimation methods for long memory processes by simulation. Additionally, we also consider the wavelet-based estimation methods for the memory parameter of long-memory signals in noisy environments by numerical studies.