青森公立大学経営経済学研究
第19巻第１号（2013）

LA-VARモデルに基づくイノベーション会計

村尾　　博※

１．はじめに

ベクトル自己回帰(Vector Autoregressions, VAR)は、Sims (1980a, 1980b) を先駆けとし、経済時系列データの有用な分析アプローチとして広く用いられるようになった。特にマクロ経済の分野では、経済の内生的なシステムと外生的なショックを識別することにより、経済理論を実証的に分析するフレームワークとして定着した。回帰分析と比べた場合のVAR分析の特徴は、モデル定式化が客観的に行われる反面、変数の係数から直接的に経済学的な意味を読み取ることが難しい点にある。このようなVAR分析においても変数間の影響関係(因果関係)を分析するアプローチは開発されており、次の３つに集約できる。

（1）グランジャー因果性検定

（2）インパルス応答分析

（3）予測誤差の分散分解

インパルス応答分析と予測誤差の分散分解は統合的にイノベーション会計（innovation accounting）やイノベーション計算と呼ばれている。このような分析を行うのが実証分析の目的であるが、その前に次のような事前的な手続きが必要である点もVAR分析の特徴になる。

VAR分析に関する伝統的な手順は次のようになっている。分析対象の変数がどのタイプの時系列過程なのかを判断するため、単位根検定と共和分検定を行う。全ての変数が単位根を持っていない場合は、変数をそのままVARに用いることから、そのようなタイプは原数値VARやレベル形VARと呼ばれる。変数が単位根を持っていると判断した場合は、さらに共和分検定を行う。どの変数間にも共和分の関係がないと判断した場合は、和分過程の次数に応じた階差形VARを用いる。ひとつでも変数間に共和分の関係があると判断した場合は、階差形VARに誤差修正項を加えたベクトル誤差修正モデル（Vector Error Correction Model, VECM）を構成する。さらに各タイプのモデルにおいて、定数項・タイムトレンド項・季節ダミーなどの確定的要素を含めるか否かの検定や判断を行う。レベル形VARがタイムトレンドを持つ場合は、タイムトレンドのあるレベル形VARと呼ばれる。

このようなモデル特定化に関わる事前的な手続きは多岐にわたり、煩雑である。さらに単位根検定や共和分検定は、誤りの可能性が高く、客観的な判断が難しいところがある。例えば単位根検定は検定力が非常に低いことで知られている。また、共和分検定も、モデル特定化の差異に対して大きく異なった結論を出すことが指摘されている。したがって研究者が目的とする本来の経済分析は事前的な仮説検定に依存し、そこで生じるバイアスからの悪影響を受ける構図になっていた。

このような問題に対処するため、Toda and Yamamoto (1995) は、Lag-Augmented Vector Autoregression Model (LA-VAR)と呼ばれるモデルを開発し、グランジャー因果性検定への利用の道筋を示した。そのモデルは単位根の次数だけVARのラグを拡張する特徴を持ち、Lag-Augmented VARと呼ばれる所以もここにある。LA-VARモデルは様々なタイプの時系列過程に対して頑健性の高い一致推定を提供するのが特徴的である。したがって単位根検定や共和分検定の問題に悩まされることなく、グランジャー因果性検定など、変数間の影響関係の分析が直接的にできる利点がある。

また、Toda and Yamada (1998) は検定サイズ

※　青森公立大学准教授

と検出力に関するシミュレーション実験を行い、LA-VARに基づく検定法と従前の検定法とを比較している。検定サイズについてはLA-VARがサンプルの大きさに関わり無く安定的な結果を示し、かつ最も高いパフォーマンスを示した。検出力については係数の値によって結果が大きく変わるところがあり、LA-VARは従前の検定法と遜色ない場合もあれば、相対的に劣る場合もある。検定サイズと検出力との間にトレードオフが生じるような結果になっているが、パフォーマンスの安定性と言う意味ではLA-VARが最も優れていると彼らは述べている。

このようなLA-VARをイノベーション会計に利用するのは自然の成り行きである。ところが、イノベーション会計への利用の道筋では、様々な疑問や困難に直面する。その背景には次のような事情がある。Toda and Yamamotoの議論は、当然のことながら、様々なタイプの時系列過程に対する推定の頑健性に向けられている。また、LA-VARの利用面の議論も、グランジャー因果性検定に向けられている。さらにLA-VARでは推定用モデルと分析用モデルとが異なることに関連し、仮説検定に使われた公式的な情報を、そのままイノベーション会計に適用できない側面がある。等々の事情が重なり、疑問や困難が生じる。

さらにグランジャー因果性検定では生じないが、イノベーション会計では次のような基本的な問題に直面する。伝統的なアプローチでは定常VARを推定し、定常VARに基づいてイノベーション会計を行う。定常VARはVMA (vector moving average)表現を持ち、VMA 表現から導出した分析道具を用い、理論的な情報が豊富に備わっている。一方、LA-VARは様々なタイプの時系列過程に対処できることから、手元のデータは単位根過程（和分過程と共和分過程）である可能性もある。単位根過程はVMA 表現を持たず、単位根過程のイノベーション会計への適用は、伝統的なフレームワークからはみ出した分析になる。このような基本的な問題もある。

一方、LA-VARをイノベーション会計に使った実証研究としては、Asai and Shiba (1996)、中川(2000)、曲(2006)、Soytas and Kucukkaya (2011)などがある。LA-VARをイノベーション会計に適用したとの記載があるが、その詳細は不明である。中川（2000）と曲（2006）は「インパルス応答関数は、上のグランジャー検定で推定されたVARから直接推定する」と述べている。文脈から想像すると、定数項もトレンド項も含まないVARであり、変数間の因果関係を示すVAR核心部であるものの、Toda and Yamamotoが想定した原数値VARでない。このようなことから、定数項やトレンド項の有無が、どのようにイノベーション会計の結果に影響するのかといった新たな疑問が湧いてくる。直感的には定数項やトレンド項の有無はイノベーション会計の結果に影響を与えないが、理論的に調べる必要性を感じる。

そこで本稿はLA-VARモデルに基づく推定から始まり、イノベーション会計へ至る利用の道筋を想定し、様々な疑問や困難を解消することを目指し、ロードマップ的な情報を提供するものである。特に前述の基本的な問題とインパルス応答の信頼区間に関する情報に焦点を置く。

一方、インパルス応答分析ではKoop et al. (1996) やPesaran and Shin (1998) によって開発された一般化インパルス応答関数に注目する。伝統的な直交インパルス応答関数は変数の順序によって結果が異なるといった問題点がある。一方、一般化インパルス応答関数は、変数の順序に影響されない結果を得ることができ、さらに線形モデル・非線形モデルに関わらず適用できる汎用性もある。したがってLA-VARモデルに基づいて推定し、それから一般化インパルス応答関数に基づいてインパルス応答分析を行うといった利用の道筋は魅力的であり、それに焦点を置く。一方、Koop et al. (1996) やPesaran and Shin (1998)といった「原典」を調べても、なぜ、一般化インパルス応答関数が変数の順序に影響されないのか疑問が残ったままになる。このような基本的な疑問に対しても本稿で答える。

ロードマップの視点は統計ソフトを利用してVAR分析を行う「理論の利用者」や「実証分析の実行者」の視点であり、そのような研究者が

容易に計算できるような情報に焦点を置く。

本稿の構成は次のようになっている。第２節は準備的な内容は含み、構造VARや誘導形VARを紹介するものであり、VARの基礎知識を持っている読者はスキップできる。しかし、イノベーション会計の議論を理解するための基礎的な情報が含まれている。第３節では理論の利用者の視点からLA-VARモデルを説明する。Toda and Yamamotoに従い、仮説検定への利用の道筋を示す。それはLA-VARモデルをイノベーション会計に利用するための準備にもなっている。第４節ではインパルス応答分析に関する理論を整理する。具体的には伝統的な直交インパルス応答関数と一般化インパルス応答関数とを対比する形で利点や欠点を整理する。そこでは一般化インパルス応答関数に関わる基本的な疑問点についても答える。第５節はインパルス応答の信頼区間を得るための情報に焦点を置く。第６節は予測誤差の分散分解に関する理論を整理する。ここでも直交インパルス応答関数に基づく手法と一般化インパルス応答関数に基づく手法との対比が示される。第7節はイノベーション会計の理論が理解できたところで、LA-VARモデルをイノベーション会計へ適用する場合の基本的な問題点を考察する。そして第8節において本稿のまとめを行う。

２．構造VARと誘導形VAR

現在ではVARモデルを連立方程式モデルの誘導形として見る観点が一般的である。この観点からVARモデルは次の２つに分類できる。

（1）構造VAR（structural VAR、SVAR）

（2）誘導形VAR（reduced form VAR）

構造VARモデルは現実の経済を誘導形VARモデルに映し出すための仲介的な役割を担う。つまり、構造VARモデルから出発して誘導形VARモデルを導出し、誘導形VARモデルに基づいて時系列分析を行う。このようなアプローチは時系列分析に理論的な制約を持ち込む。その代表格が後述する再帰的構造VAR（recursive structural VAR）である。一方、理論的な制約を加えないアプローチもある。同時点の変数間の関係に制約を置かないという意味で、誘導形VARモデルは無制約VARモデル（unrestricted VAR、UVAR）と呼ばれることがある。

いま、分析対象とするm個の経済変数のt期の値からなるベクトルを

$$y_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{mt})' \tag{1}$$

とする。これらの経済変数は、同時点で相互に依存し、過去の互いの値にも依存すると共に、経済的なショックの影響を受けて変動しているものとする。これらの依存関係を近似的に線形で

$$A_0 y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \cdots + A_k y_{t-k} + \varepsilon_t \tag{2}$$

として表すことができるとする。このモデルは連立方程式モデルの構造形として見ることができるので構造VARや構造形VARと呼ばれる。外生変数が含まれていないが、外生変数を含めたモデルにすることも出来る。ここで$A_i (i = 0, 1, \cdots, k)$は$m \times m$の定数からなる係数行列であり、$\varepsilon_t$は誤差項や撹乱項と呼ばれる$m$個の確率変数からなるベクトルである。経済に発生するショックはε_tを通じて伝播することから、ε_tをショックと呼ぶこともある。ε_tの要素は、異なった時点間では相関を持たず、また、同時点での相関関係もなく、平均がゼロの同一の分布に従うとする。このような仮定は次の考え方を反映している。経済に発生するショックは、その本源的な段階まで辿れば、相互に独立したショックから成り立っているという考え方である。もし、２つのショックの間に相関関係があれば、それは２つのショックが共通の、さらに本源的なショックを含んでいるためであると考える。このように相互に独立な段階まで分解されたショックを考える。このとき、ε_tの共分散行列$E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Sigma_\varepsilon$は対角行列となる。

推計に当っては構造VARから得られる次の誘導形VARが用いられる。

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \cdots + \Phi_k y_{t-k} + u_t \tag{3}$$

ただし、$\Phi_i = A_0^{-1} A_i (i = 1, 2, \cdots, k)$、$u_t = A_0^{-1} \varepsilon_t$である。誘導形の誤差項$u_t$の共分散行列を$E(u_t u_t') = \Sigma_u$とすると、$\Sigma_u$と$\Sigma_\varepsilon$との間には次の関係がある。

$$\Sigma_u = A_0^{-1} \Sigma_\varepsilon (A_0^{-1})' \tag{4}$$

ショックといった意味ではε_tを構造ショック（structural shocks）、u_tを誘導ショック（reduced shocks）と呼んで区別する。u_tの各要素はε_tの複数要素と関連し、したがってu_tの要素は互いに相関しているのが普通である。u_tの共分散行列Σ_uは$m \times m$の対称行列であることから、$m(m+1)/2$個の未知な定数を含むことになる。誘導ショックu_tから構造ショックε_tを識別することが必要な場合、結論的には$m(m-1)/2$個の制約が必要になる。そこで係数行列A_0に次のような$m(m-1)/2$個のゼロ制約を課すことが行われる。

$$\underset{m \times m}{A_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(m-1),1} & a_{(m-1),2} & a_{(m-1),3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m,(m-1)} & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

これはSims（1980a）によって提唱されたものであり、再帰的構造（recursive structure）と呼ばれる。特定のショックに対する変数の反応に時間的遅れが存在することを意味している。このような時間的遅れの構造が説得性を持つケースもあれば、無いケースもある。再帰的構造VAR（recursive structural VAR）は、係数行列A_0が上に示すような下三角行列であること、構造ショックの共分散行列Σ_εが対角行列であることの２つの仮定から成り立っており、モデル構造は適度識別である。

３．Lag-Augmented VARモデル

誘導形VARモデルに関する分類としては、レベル形VAR、階差形VAR、ベクトル誤差修正モデルなどがある。様々なVARモデルの中で、Toda and Yamamoto (1995) による LA-VARモデルは注目すべきものがある。LA-VARの特徴や利点は既に述べたので、その構造を具体的に見ていこう。

分析対象とするm個の経済変数のt期の値からなるベクトルを$y_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{mt})'$とする。そして$y_t$は次のレベル形$VAR(k)$に従うとする。

$$y_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 t + \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \cdots + \Phi_k y_{t-k} + u_t \quad (6)$$

ただし、tはm次元のタイムトレンド項である。Γ_0とΓ_1は$m \times 1$の定数からなる係数ベクトル、$\Phi_i (i = 1,2,\cdots,k)$は$m \times m$の係数行列である。現在のところ、$k$は既知な真のラグ次数であるが、未知な場合に、$k$をどのように決定するかは後で述べる。$m$次元の誤差項$u_t$は平均ゼロ、共分散行列$E(u_t u_t') = \Sigma_u$を持ったi.i.d.確率過程に従う。つまり、

$$u_t \sim IID(0, \Sigma_u) \quad (7)$$

である。このような性質を持つu_tは独立ホワイト・ノイズと呼ばれる。

そして係数推定の場面では真のラグ次数kに拡張ラグを意図的に追加した形からなるLA-VARモデルを構成する。意図的に追加する拡張ラグ次数は単位根の次数であり、その最大次数を$d_{\max}$と記すと、ラグ次数が$p = k + d_{\max}$となる次のレベル形$VAR(p)$を構成する。

$$y_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 t + \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \cdots + \Phi_k y_{t-k} + \Phi_{k+1} y_{t-k-1} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + u_t \quad (8)$$

ただし、$k \geq d_{\max}$である。したがってLA-VARモデルは次のように書くこともできる。

$$y = \text{確定的要素部分} + \text{真のVAR部分} + \text{拡張VAR部分} + \text{誤差項} \quad (9)$$

確定的要素部分にはタイムトレンド項tの２乗項や３乗項、さらには季節ダミーを含めることができるが、簡素化のため、上の定式化では定数項とタイムトレンド項tのみを入れている。

実際はラグ次数kや$d_{\max}$などが未知であるので、具体的な手順は次のようになる。

(1) ラグ次数kを含め、レベル形$VAR(k)$の定式化を決定する。トレンド項や季節ダミーなど、確定的要素部分の定式化も含まれている。推定法は最小２乗推定法になる。一方、ラグ次数kを決める基準としては、Akaike Information Criterion（AIC, 赤池の情報量基準）、Schwarz Information Criterion (SIC)、Hannan-Quinn Criterion (HQC)などがあるが、イノベーション会計におけるパーフォマンスの良さといった意味で、Kilian (2001)はAICを薦めている。また、Ng and Perron (2001) は、ラグ次数kに依存しないようにサンプル数を固

定するModified Information Criterion (MIC)を提唱すると共にMICの中でも特にModified Akaike Information Criterion (MAIC)を薦めている。

(2) 一方、単位根検定を行い、各変数の和分次数を調べる。各変数の中で最大の和分次数を $d_{\max}$ として選ぶ。例えば当該変数が２次の和分過程 $I(2)$ に従うと判断した場合は $d_{\max}=2$ とする。単位根検定はADF(augmented Dickey-Fuller)検定やADF-GLS検定(Elliott et al.,1996)を使うことが考えられる。

(3) レベル形VAR(k)の定式化と拡張ラグ次数 $d_{\max}$ が決まり、係数を推定する場面ではラグ次数が $p=k+d_{\max}$ となるLA-VARモデルを構成し、最小２乗推定法で推定する。

(4) 係数推定後は拡張ラグ次数 $d_{\max}$ の部分を取り除き、レベル形VAR(k)に基づき本来の経済分析を行う。

グランジャー因果性検定・インパルス応答分析・予測誤差の分散分解など、経済分析では、変数間の影響関係を表すVAR核心部に焦点が置かれる。定数項やトレンド項などの確定的要素は、分析対象に入るときもあれば、入らないときもある。グランジャー因果性検定であれば確定的要素は検定の対象外となり、分析対象に入らない。このような視点は次に示す３分割法や２分割法へ反映される。

Toda and Yamamotoに従ってLA-VARの右辺に含まれる変数を3分割し、LA-VARの記述を次のように簡略化する。

$$y_t=\Gamma\tau_t+\Phi x_t+\Psi z_t+u_t \tag{10}$$

ただし、$\Gamma=(\Gamma_0,\Gamma_1)'$、$\tau_t=(1,t)'$、$\Phi=(\Phi_1,\cdots,\Phi_k)$、$x_t=(y'_{t-1},\cdots,y'_{t-k})'$、$\Psi=(\Phi_{k+1},\cdots,\Phi_p)$、$z_t=(y'_{t-k-1},\cdots,y'_{t-p})'$である。通常の行列表記では次のようになる。

$$Y'=\Gamma\tau'+\Phi X'+\Psi Z'+U' \tag{11}$$

ただし、$Y=(y_1,\cdots,y_T)'$、$\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_T)'$、$X=(x_1,\cdots,x_T)'$、$Z=(z_1,\cdots,z_T)'$ である。ここで興味の対象になっている係数を$\phi=vec(\Phi)=vec(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_k)'$と記し、その制約

$$H_0:f(\phi)=0 \tag{12}$$

に関する検定を考える。ただし、$f(\bullet)$はJ次元の関数である。これはJが制約の個数であることを意味する。この帰無仮説をテストするためには、LA-VARを最小２乗推定法で推定する。一方、推定量$\hat{\phi}$に基づき、次のワルド検定量Wを得る。

$$W=f(\hat{\phi})'\left[\left(\frac{\partial f(\phi)}{\partial\phi}\right)\left\{\hat{\Sigma}_u\otimes(X'Q_{\tau Z}X)^{-1}\right\}\left(\frac{\partial f(\phi)}{\partial\phi}\right)'\right]^{-1}f(\hat{\phi}) \tag{13}$$

ただし、$\hat{\Sigma}_u=\frac{1}{T}\hat{U}'\hat{U}$、$Q_{\tau Z}=Q_\tau-Q_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'Q_\tau$、$Q_\tau=I_T-\tau(\tau'\tau)^{-1}\tau'$ であり、I_Tは$T\times T$の単位行列である。Toda and Yamamotoの(8)式と比べ、Qを$Q_{\tau Z}$と記しているなど、一部に記号の違いが見られるものの、彼らの成果を素直に再現している。このワルド検定量Wは漸近的に自由度Jのカイ２乗分布に従う。つまり、

$$W\overset{a}{\sim}\chi^2(J) \tag{14}$$

となる。

実証研究の仮説検定では線形制約になることが多く、それは次のように書ける。

$$H_0:R\phi=r \tag{15}$$

ただし、Rは係数ベクトルϕに線型制約を加えるための既知な行列、rは既知な値からなるベクトルである。そして$rank(R)=J$とする。この場合、ワルド検定量Wは次のようになる。

$$W=(R\hat{\phi}-r)'\left[R\left\{\hat{\Sigma}_u\otimes(X'Q_{\tau Z}X)^{-1}\right\}R'\right]^{-1}(R\hat{\phi}-r)\overset{a}{\sim}\chi^2(J) \tag{16}$$

一方、係数推定量$\hat{\phi}$の漸近的分布も示しておこう。インパルス応答の区間推定では必要になる。

$$\sqrt{T}(\hat{\phi}-\phi)\overset{a}{\sim}N[0,\Sigma_u\otimes(T^{-1}X'Q_{\tau Z}X)^{-1}] \tag{17}$$

ところでToda and YamamotoはLA-VARの右辺に含まれる変数を３分割にして(τ,X,Z)と記しているが、分析対象に含まれるか否かの視点から２分割にした方が何かと便利である。グランジャー因果性検定では、分析対象から外す変数は(τ,Z)である。そこで$W=(\tau,Z)$と置き、LA-VARの右辺に含まれる変数を２分割にして(X,W)

と記すことにする。この２分割法の下ではLA-VARの記述は次のようになる。

$$y_t = \Phi x_t + \Psi w_t + u_t \qquad (18)$$

通常の行列表記では次のようになる。

$$Y' = \Phi X' + \Psi W' + U' \qquad (19)$$

このような２分割法に基づき、係数推定量 $\hat{\phi}$ の共分散行列は

$$\Sigma_u \otimes (X'Q_W X)^{-1} \qquad (20)$$

となる。ただし、$Q_W = I_T - W(W'W)^{-1}W'$ である。ところで２分割法の Q_W は３分割法の $Q_{\tau Z}$ に等しい。その証明は付録に示す。

２分割法の方が何かと便利である述べたが、それは分析対象の部分か否かといった意味で概念的にもスッキリした形で分けることができ、さらにコンピュータ・コードの簡略化にも役立つ。２分割法に比べて３分割法の場合は、同じことをするのに、わざわざ複雑なアプローチを取ることに繋がり、コンピュータ・コードが複雑になると共にミスの可能性も高くなる。この点はコンピュータ・コードを自分で書く「理論の利用者」や「実証分析の実行者」にとって重要なことである。２分割法は次の残差回帰の手法でも役立ち、コンピュータ・コードを大幅に簡略化できる。

２分割法の場合は、XをWに回帰させる残差回帰の手法から次のような形で $X'Q_W X$ が計算できる。そのために次のように定義する。

$$\tilde{X} \equiv Q_W X \; : \; X \text{ を} W \text{に OLSで回帰させたときの残差} \qquad (21)$$

Q_Wはべき等行列であることから $Q_W^2 = Q_W$といった性質があり、さらに対称行列であるから $Q'_W = Q_W$の性質もある。したがって $\tilde{X}'\tilde{X} = X'Q'_W Q_W X = X'Q_W X$ が求まる。このあたりの詳しい情報も付録に含めている。

繰り返しになるが、LA-VARに基づく検定法は、単位根検定や共和分検定に関わる煩雑性やバイアスを回避し、経済的に意味のある変数間の関係を直接的に検定できる利点がある。さらに推定に限定しても、単位根検定や共和分検定の問題を回避しつつ、レベル形VARを一致性のある形で推定できる利点がある。

このようなLA-VARにも問題点はある。LA-VARは、余分なラグ変数を説明変数側に加える形で成り立っているので、推定の有効性が低下する。しかし、一致性が無くなるといった深刻な問題ではない。Toda and Yamamoto (1995, p.246)の言葉を借りれば次のようになる。"Of course, our approach is inefficient and suffers some power since we intentionally over-fit VAR's." もし、VARが多くの変数を含み、真のラグ次数が１のような場合は、余分なラグ１個でも有効性が大きく損なわれる。一方、VARが少数の変数を含み、真のラグ次数が大きい場合は、余分な少数のラグは有効性を大きく損なわない。そして現実的には後者の場合が多いと言える。

４．インパルス応答関数

インパルス応答分析は、１個ないしは２個の内生変数にショックを与え、その波及効果を定量的に見ていく分析である。グランジャー因果性検定と異なり、インパルス応答分析は変数間の影響関係を定量的に分析できる。考慮しているシステムに与えるショックとしては、マイナスのショックもあればプラスのショックもある。１時的なショックもあれば恒久的なショックもある。ただし、「インパルス応答関数」という場合は、分析道具を意味することから、単位ショックを１期のみ与えることになる。

このセクションでは伝統的な直交インパルス応答関数（orthogonalized impulse response function）と新しい一般化インパルス応答関数(generalized impulse response function)とに焦点を置き、インパルス応答分析の理論を整理してゆく。直交インパルス応答関数はSims(1980a, 1880b)を先駆けとして普及しているが、VARの変数の順番を変えると、インパルス応答の結果が変わることがあるといった問題点がある。一方、一般化インパルス応答関数は、Koop et al. (1996)やPesaran and Shin (1998) によって開発され、変数の順序に影響されないといった利点があり、さらに線形モデル・非線形モデルに関わらず適用できる汎用性もあり、これら２点で注目に値する。LA-VARモデルにおいても、y_tに含まれる一部の変数

が制限付き変数である場合、リジーム・スイッチング・モデルにする場合、等々では非線形モデルとなり、一般化インパルス応答関数に基づく分析が求められる。したがってLA-VARモデルと一般化インパルス応答関数との組み合わせは、本稿において重要な位置を占める。

まず、イノベーション会計の理論を伝統的なフレームワーク内で整理するため、次のイノベーション会計用モデルを考え、かつ時系列過程は定常であるとする。

$$y_t = \Gamma_0 + \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \cdots + \Phi_k y_{t-k} + u_t \quad (22)$$

この定式化ではタイムトレンド項tが含まれていないが、この点に関しては第７節で考察する。(22)式はラグ演算子$L^s y_t = y_{t-s}$を使って次のように書くことができる。

$$\Phi(L) y_t = \Gamma_0 + u_t \quad (23)$$

ただし、$\Phi(L) = I_m - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \cdots - \Phi_k L^k$ である。定常であることから、当該VARは次のVMA (vector moving average)表現を持つ。

$$y_t = \sum_{s=0}^{\infty} A_s u_{t-s} + \mu \quad (24)$$

ただし、$\mu = E(y_t) = (I_m - \Phi_1 - \Phi_2 - \cdots - \Phi_k)^{-1}\Gamma_0$、$A_s$は$m \times m$の係数行列であり、現時点$t$からの時期数$s$によって次のように変化する。

$$\begin{aligned} A_0 &= I_m \\ A_1 &= \Phi_1 A_0 \\ A_2 &= \Phi_1 A_1 + \Phi_2 A_0 \\ &\vdots \\ A_k &= \Phi_1 A_{k-1} + \Phi_2 A_{k-2} + \cdots + \Phi_k A_0 \\ &\vdots \\ A_s &= \Phi_1 A_{s-1} + \Phi_2 A_{s-2} + \cdots + \Phi_k A_{s-k} \end{aligned} \quad (25)$$

VMA(∞)表現式は次の点が特徴的である。(1) y_tが直交する線形確定部分と線形非確定部分といった具合に２分割されている。(2)線形非確定部分は現在までの$\{u_t\}$過程の加重和になっている。(3)そして現在から遠い時点のu_{t-s}ほどy_tへの影響が小さい。

ところで y_t の現実値と期待値との差といった意味、モデルの確定部分で予測できなかった「新たなもの」が y_t に含まれているといった意味で、u_tは「イノベーション」と呼ばれる。イノベーションと誤差項とは入れ替え可能な用語であるが、その意味合いは全く異なる。VMA(∞)表現では、y_tの変動を記述する本質的な変動をイノベーション$\{u_t\}$が担っている。回帰分析の誤差項のような「クズ」ではない。このような意味において VMA(∞)表現式はイノベーション会計の中心的な理論式になっている。

次はVMA(∞)表現を利用して伝統的なインパルス応答関数を記述するが、その前に伝統的なインパルス応答関数そのものを説明する。伝統的なインパルス応答関数は、ある時期tにδの大きさのショックがシステムに与えられると、h期後にシステムがどのようになっているかの疑問に答えるものである。その他のショックはシステムに与えられないと想定する。したがって伝統的なインパルス応答関数 $IRF^O(\bullet)$は、例えば次のように定義される。

$$\begin{aligned} IRF^O(h,\delta,\omega_{t-1}) \equiv\ & E(y_{t+h} \mid u_t = \delta, u_{t+s} = 0, \varpi_{t-1}) \\ & - E(y_{t+h} \mid u_t = 0_i, u_{t+s} = 0, \varpi_{t-1}) \end{aligned}$$

$$\text{where } s = 1,2,\cdots,h \quad (26)$$

ただし、hはインパルス応答結果を観測する時期(time horizon)、δはショックの大きさを表すベクトルである。普通、δの要素は一つδ_jを除き、ゼロである。ショック発生時tにおける情報集合Ω_{t-1}の実現値はϖ_{t-1}で表し、ϖ_{t-1}は歴史と呼ぶことが多い。δに含まれるj番目の要素δ_jのみに対するインパルス応答を考えると、インパルス応答関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} IRF_j^O(h,\delta_j,\omega_{t-1}) =\ & E(y_{t+h} \mid u_{jt} = \delta_j, u_{t+s} = 0, \varpi_{t-1}) \\ & - E(y_{t+h} \mid u_t = 0_j, u_{t+s} = 0, \varpi_{t-1}) \end{aligned}$$

$$\text{where } s = 1,2,\cdots,h \quad (27)$$

ただし、$IRF_j^O(\bullet)$に見られる添字jはショック震源地を明示する意味で使っている。

先のVMA(∞)表現式は、u_tに１単位のショックが生じたときのy_{t+h}の値をA_hで表すことができ、それは$IRF_j^O(\bullet)$をA_hで記述するのに役立つ。このとき誘導イノベーションu_tの要素が同時点で互いに相関していることも考慮する必要がある。u_tの要素が同時点で互いに相関していることから、第j番目の誘導ショックu_{jt}は第j番目の変数Y_{jt}のみならず他の変数$Y_{it}(i \neq j)$をも同時点で変化させ、その結果、どの変数（方程式）で新しい変化が起こったのか識別できなくなるといっ

た問題がある。このような問題に対し、u_{jt}だけにショックを与え、他の要素については強制的に$u_{it}=0\ (i \neq j)$とする対処の仕方は、u_tの要素が同時点で互いに相関していることを無視するものであり、現実的でないし、有用な情報にもならない。インパルス応答がショックの組立てに依存するといった意味で、このような問題をKoop et al. (1996)は組立て問題（compositional problem）と呼んでいる[1)]。

組立て問題に対する最もポピュラーな対処法が再帰的構造VARである。その考え方は誤差項に瞬間的な相関が無くなるように、つまり、誤差項の共分散行列Σ_uが対角行列となるように、モデルを変換するものである。具体的には$\Sigma_u = PP'$といった関係を満たすコレスキー（Chelesky）行列Pを用いて誘導イノベーション$(u_{1t}, u_{2t}, \cdots, u_{mt})'$を構造イノベーション$(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \cdots, \varepsilon_{mt})'$で表現する。そして互いに無相関(直交)になった構造イノベーション$(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \cdots, \varepsilon_{mt})'$に基づくインパルス応答分析を実行する。このような再帰的構造VARに基づく伝統的なインパルス応答関数が直交インパルス応答関数（orthogonalized impulse response function）と呼ばれている。

それでは直交インパルス応答関数を具体的に導出していこう。まず、誘導イノベーションu_tと構造イノベーションε_tとの間には次の関係がある。

$$\Sigma_u = A_0^{-1} \Sigma_\varepsilon (A_0^{-1})'$$

コレスキー分解によって$\Sigma_u = PP'$を満たすユニークな下三角行列Pを見つける。さらに$P = FD^{\frac{1}{2}}$を満たし、Fは対角要素が１であるような下三角行列、Dは全ての対角要素が正であるような対角行列がユニークに存在する。したがってDは対角行列となった共分散行列$\Sigma_\varepsilon = E(\varepsilon_t \varepsilon_t')$を表す。$F^{-1}$も対角要素が１となった下三角行列であり、$F^{-1}$はセクション２で示した再帰構造の係数行列$A_0$を表す。$F$と$P$を比較した場合、$F$は対角要素が１である下三角行列であるのに対し、$P$は誘導イノベーションの標準偏差が対角要素になった下三角行列である。一方、実証分析では標準化された次のイノベーションε_t^*を使うことが多い。

$$\varepsilon_t^* \equiv P^{-1} u_t = D^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_t \tag{28}$$

標準化イノベーションε_t^*の共分散行列は$\Sigma_{\varepsilon^*} = E(\varepsilon_t^* \varepsilon_t^{*\prime}) = I_m$となる。そして$\varepsilon_{jt}^* = 1$の上昇は誘導イノベーション$u_{jt}$のスケールで当該標準偏差の大きさのショック、構造イノベーションε_{jt}のスケールでも当該標準偏差の大きさのショックに等しい。先のVMA(∞)表現式はコレスキー行列Pを使って次のように表現することができる。

$$\begin{aligned} y_t &= \sum_{s=0}^{\infty} A_s P P^{-1} u_{t-s} + \mu = \sum_{s=0}^{\infty} A_s P (P^{-1} u_{t-s}) + \mu \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} A_s P \varepsilon_{t-s}^* + \mu \end{aligned} \tag{29}$$

この表現式の重要な点は互いに無相関（直交）となった標準化イノベーション時系列$\{\varepsilon_t^*\}$で表現されていることである。このVMA(∞)表現から次のことが読み取れる。標準化された単位ショック$\varepsilon_{jt}^* = 1$はPe_jの形となって誘導形VARシステムへ伝播する。ただし、e_jは$m \times 1$の選択ベクトルであり、第j番目の要素を１、他の要素をゼロとするベクトルである。その後の波及効果は次の形で観測できる。

$$IRF_j^O(h, \delta_j, \omega_{t-1}) = A_h P e_j \quad \text{for} \quad h = 1,2,3,\cdots \tag{30}$$

これが直交インパルス応答関数である。Pe_jの第ｊ番目要素が$\sqrt{\sigma_{jj}}$であることから、ショック発生時(h=0)、第ｊ番目変数Y_{jt}は$\sqrt{\sigma_{jj}}$だけ上昇する。

組立て問題はVARのインパルス応答分析において考慮すべき基本的な問題の一つであるが、線形・非線形モデルを含め、VARのインパルス応答分析において考慮すべき基本的な問題をKoop et al. (1996)は次の３つに集約している。

(1)　前述の組立て問題（compositional problem）
(2)　歴史依存性（history dependency）
(3)　ショック依存性（shock dependency）

歴史依存性とは過去からショック発生時までの歴史が異なると、インパルス応答の結果が変わってくるといった意味である。ショック依存性とは、+1と-1のショックに対する反応が逆にならないといった非対称性、さらに+2のショックに対する反応が+1のショックに対する反応の２倍にならないといった非線形性を意味している。歴史依存性とショック依存性は非線形VARで生じ

る。一方、組立て問題は全てのVARで生じる。

このような基本的な問題に対して包括的に対処するために開発されたのが一般化インパルス応答関数である。ショックや歴史は$\{y_t\}$を含んだ確率過程$\{y_t, u_t, \Omega_{t-1}\}$からの実現値と考えることが根底にある。ショックや歴史をも確率変数として見る考え方は、インパルス応答関数も確率変数として取り扱うことにつながる。これは未来に対する取り扱いを「期待値」で対処する考え方につながり、結果として平均インパルス応答を計算することになる。このような考えに基づき、(u_t, Ω_{t-1})を確率変数とする無条件の一般化インパルス応答関数$IRF^G(\bullet)$は次のように定義される。

$$IRF^G(h, u_t, \Omega_{t-1}) \equiv E(y_{t+h} | u_t, \Omega_{t-1}) - E(y_{t+h} | \Omega_{t-1}) \quad \text{for} \quad h = 1,2,3,\cdots \tag{31}$$

そしてショック$u_t = \delta$を所与とする条件付き一般化インパルス応答関数は

$$IRF^G(h, \delta, \Omega_{t-1}) = E(y_{t+h} | u_t = \delta, \Omega_{t-1}) - E(y_{t+h} | \Omega_{t-1}) \tag{32}$$

となる。先の定常な線形VARの場合、VMA(∞)表現を利用し、条件付き一般化インパルス応答関数は次のように書ける。

$$IRF^G(h, \delta, \Omega_{t-1}) = A_h \delta \quad \text{for} \quad h = 1,2,3,\cdots \tag{33}$$

考慮しているのが線形VARであることから、インパルス応答は歴史（Ω_{t-1}）に依存しないことが(33)式の右辺に示されている。ひとつのショックδ_jだけを所与とする場合は

$$IRF_j^G(h, \delta_j, \Omega_{t-1}) = E(y_{t+h} | u_{jt} = \delta_j, \Omega_{t-1}) - E(y_{t+h} | \Omega_{t-1}) \tag{34}$$

となる。ひとつのショックδ_jを所与とする条件付き一般化インパルス応答関数は、組立て問題の解決策を提供してくれる。震源地となるショックδ_jのみを所与とし、他のショックの効果を統合化することにより、組立て問題の解決策となる。この点は重要なので、Koop et al. (1996, p.133)の言葉を借りよう。

> The GI also lends itself naturally to a solution of the compositional problem without the use of a *priori* theory in both the case of linear and nonlinear models. We can define the generalized impulse response function to be conditional not on all the shocks at time t but on just one of them. That is, we can consider fixing the *i*th shock from the vector of all shocks, V_t, and then integrating out the effects of the other shocks at time t given its value, v_{it},

彼らの主張を詳しく見るため、$IRF_j^G(h, \delta_j, \Omega_{t-1})$における$E(y_{t+h} | u_{jt} = \delta_j, \Omega_{t-1})$に注目する。これは、ひとつのショック$u_{jt} = \delta_j$だけを所与とし、同時点の他のショックや将来のショックは全て統合することを意味している。特に所与の$u_{jt} = \delta_j$から他の要素$u_{it} (i \neq j)$への影響がどのようになっているかが重要となるが、それは$E(u_t | u_{jt} = \delta_j)$で観測する。多くの場合、$E(u_t | u_{jt} = \delta_j)$はショック$\delta_j$に対して非線形になる。ところが、$u_t$が正規分布に従うと仮定すると、次に示すようにショックδ_jに対して線形になる。

$$E(u_t | u_{jt} = \delta_j) = \eta_j \sigma_{jj}^{-1} \delta_j \tag{35}$$

ただし、$\sigma_{jj} = E(u_{jt}^2)$であり、これは$j$番目の要素$u_{jt}$の分散である。そして$\eta_j = E(u_t u_{jt}) = (\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \cdots, \sigma_{mj})'$であり、これは$j$番目の要素$u_{jt}$と他の要素との共分散ベクトルである。さらに次の結果が導出できる。

$$E(u_t | u_{jt} = \delta_j) = \eta_j \sigma_{jj}^{-1} \delta_j = \Sigma_u e_j \sigma_{jj}^{-1} \delta_j \tag{36}$$

ただし、$\eta_j = \Sigma_u e_j$であり、Pesaran and Shin(1998, p.19) に示されている。このような結果、δ_jを所与とする条件付き一般化インパルス応答関数は次のようになる。

$$IRF_j^G(h, \delta_j, \Omega_{t-1}) = A_h \left(\frac{\Sigma_u e_j}{\sqrt{\sigma_{jj}}} \right) \left(\frac{\delta_j}{\sqrt{\sigma_{jj}}} \right) \quad \text{for} \quad h = 1,2,3,\cdots \tag{37}$$

したがって$u_{jt} = \delta_j = \sqrt{\sigma_{jj}}$の大きさのショックを与えた場合は次のようになる。

$$IRF_j^G(h, \delta_i, \Omega_{t-1}) = A_h \left(\frac{\Sigma_u e_j}{\sqrt{\sigma_{jj}}} \right) \quad \text{for} \quad h = 1,2,3,\cdots \tag{38}$$

$\sigma_{jj}^{-\frac{1}{2}} \Sigma_u e_j$の第$j$番目要素が$\sqrt{\sigma_{jj}}$であることから、ショック発生時（$h$=0）、第$j$番目変数$Y_{jt}$は$\sqrt{\sigma_{jj}}$だけ上昇することが読み取れる。

このような結果が得られたところで、組立て

問題に対する一般化インパルス応答関数の対処法を整理しておこう。ひとつのショック $u_{jt}=\delta_j$ のみを所与とする条件付きにすることで、ショック $u_{jt}=\delta_j$ に対応する変数 Y_{jt}（方程式）で新しい変化が生じたことが識別できる。さらに $E(u_t|u_{jt}=\delta_j)$ の形で同時点における誘導ショック間の相関も考慮している。したがって組立て問題の解決策のひとつになる。さらに共分散行列全体 Σ_u を直交化するのではなく、$E(u_t|u_{jt}=\delta_j)$ といった形、具体的には $\Sigma_u e_j$ といった形で、Σ_u における第 j 番目の列のみを取り出してインパルス応答を計算するようにしている。これによって変数の順序に影響されないインパルス応答分析になる。

直交インパルス応答関数 $IRF_j^O(\bullet)$ と一般化インパルス応答関数 $IRF_j^G(\bullet)$ とを比較可能な形で書くと、次のようになる。

$$IRF_j^O(h,\delta_j,\varpi_{t-1})=A_hPe_j \quad \text{for} \quad h=1,2,3,\cdots$$

$$IRF_j^G(h,\delta_j,\Omega_{t-1})=A_h\left(\frac{\Sigma_u e_j}{\sqrt{\sigma_{jj}}}\right) \quad \text{for} \quad h=1,2,3,\cdots$$

これら両関数に関し、共通している点と異なる点をチェックしておこう。

(1) ショックは第 j 番目要素で起こっており、それは標準化されたスケールで１標準偏差、誘導形のスケールでも１標準偏差 $\sqrt{\sigma_{jj}}$ の大きさである点で共通している。

(2) 直交インパルス応答関数 $IRF_j^O(\bullet)$ では再帰構造を仮定し、一般化インパルス応答関数 $IRF_j^G(\bullet)$ では正規分布を仮定している点で異なる。

(3) 誘導形VARシステムへの入力の違いは次のようになる。直交インパルス応答関数 $IRF_j^O(\bullet)$ では Pe_j で表されるショックが入力となり、一般化インパルス応答関数 $IRF_j^G(\bullet)$ では $\sigma_{ii}^{-\frac{1}{2}}\Sigma_u e_i$ で表されるショックが入力となる。言い換えると、ショック発生時（h＝0）、誘導誤差項の相関を通じてショックが各変数へどのように伝播するかは Pe_j や $\sigma_{jj}^{-\frac{1}{2}}\Sigma_u e_j$ に表されている。

最後の点(3)に関連し、インパルス応答関数の計算アルゴリズムを書いておこう。アイデアが容易に理解できるように、h 期後のインパルス応答関数 $IRF_j(h)$ を Δy_{t+h} と記し、ラグ次数は $k=4$ とする。

$$\Delta y_t=\sigma_{jj}^{-\frac{1}{2}}\Sigma_u e_j$$

$$\begin{aligned}
\Delta y_{t+1}&=\Phi_1\Delta y_t\\
\Delta y_{t+2}&=\Phi_1\Delta y_{t+1}+\Phi_2\Delta y_t\\
\Delta y_{t+3}&=\Phi_1\Delta y_{t+2}+\Phi_2\Delta y_{t+1}+\Phi_3\Delta y_t
\end{aligned}$$

そして $k=4\le h$ では

$$\begin{aligned}
\Delta y_{t+h}&=\Phi_1\Delta y_{t+h-1}\\
&\quad+\Phi_2\Delta y_{t+h-2}+\Phi_3\Delta y_{t+h-3}+\Phi_4\Delta y_{t+h-4} \qquad (39)
\end{aligned}$$

となる。実際の計算では、$\Phi_i(i=1,2,\cdots,k)$ は推定された係数行列になる。上の例では一般化インパルス応答関数の場合を示しているが、直交インパルス応答関数の場合は説明するまでもないであろう。

一般化インパルス応答関数の特徴や性質を整理しておこう。

(1) 一般化インパルス応答関数は、非線形インパルス応答関数の考え方に従い、歴史やイノベーションを確率変数と見なし、したがってインパルス応答関数も確率変数になる。その帰結として平均インパルス応答を計算する。

(2) 組立て問題については、震源地となるショックのみを所与とする条件付き一般化インパルス応答関数で対処する。まず、震源地となるショックのみを所与とすることにより、どの変数（方程式）で新しい変化が生じたか識別できるようにする。さら $E(u_t|u_{jt}=\delta_j)$ の形で誘導ショック間の相関も考慮する。これは共分散行列 Σ_u の全部を用いるのではなく、その１列のみに基づきインパルス応答を計算することにつながっている。

(3) 一般化インパルス応答関数は変数を並べる順序に影響されない。誘導イノベーションの共分散行列 Σ_u を直交化するのではなく、Σ_u の列を一個づつ取り出してインパルス応答を計算することに関連している。

(4) 誘導イノベーションの共分散行列 Σ_u が対角行列である場合は、

$$IRF_j^G(h)=IRF_j^O(h) \quad \text{for} \quad j=1,2,3,\cdots,m \qquad (40)$$

である。

(5)　一方、Σ_uが対角行列でない場合は、

$$IRF_1^G(h) = IRF_1^O(h)$$
$$IRF_j^G(h) \neq IRF_j^O(h) \quad \text{for} \quad j = 2,3,\cdots,m \quad (41)$$

である。

一般化インパルス応答関数を「変数を並べる順序に影響されないインパルス応答関数」として紹介している文献は多いが、なぜ、組立て問題の解決策のひとつになっているのか、なぜ、変数を並べる順序に影響されないのかを分かりやすく解説する文献は見かけない。Koop et al. (1996)やPesaran and Shin (1998)といった「原典」においても、そうである。このような状況において、前述した本稿の解説が基本的な疑問の解消に役立つことに期待したい。

ところで、一般化インパルス応答関数を使うコストは何であろうか。直交インパルス応答関数は正規分布を仮定する必要が無いが、上に示した一般化インパルス応答関数は正規分布の仮定に基づき導出されている。正規分布の仮定が適切でないケースがあるかも知れない。そのような場合は確率的シミュレーションによって $E(u_t | u_{jt} = \delta_j)$ を求めることが考えられる。

このセクションでは直交インパルス応答関数と一般化インパルス応答関数との対比に焦点を置きつつ、インパルス応答分析の理論を整理した。

5．インパルス応答の信頼区間

前セクションの議論からインパルス応答の平均曲線は描けるようになった。このセクションではインパルス応答の信頼区間を得ること、つまり、信頼区間の上限曲線と下限曲線を描くことを考える。まず、インパルス応答関数に関する推定量の標準誤差はVARパラメータに対して複雑な非線形関数になる。このような背景があり、インパルス応答の信頼区間を得るためのアプローチとしては次の３つが開発されている。

(1)　漸近法（Asymptotic method）

(2)　モンテカルロ法（Monte Carlo method）

(3)　ブートストラップ法（Bootstrap method）[2)]

漸近法についてはLutkepohl (1990)やHamilton (1994,pp.336-337)、モンテカルロ法につてはHamilton (1994, p.337-338)、ブートストラップ法についてはRunkle (1987)やHamilton (1994, pp.337-338)が参考になる。ブートストラップ法については、さらにLutkepohl (2000)、Benkwitz et al. (2001)、Kilian (1998)などもある。

これら３つのアプローチに関し、シミュレーション実験による正確性の比較に興味があり、文献調査を行った。その結果、現在のところは統一的な結論を得ることが困難であることが分かった。例えばGriffiths and Lutkepohl (1993) は、信頼区間のレベルとパワーの面で、いずれのアプローチも甲乙つけがたいといった見解を示している。一方、Kilian (1998)は彼が提唱するbootstrap-after-bootstrap法を含め、小さな標本数（50と100）を想定した比較を行っている。その結果は彼が提唱する方法が最も良いのだが、モンテカルロ法が第２位、漸近法が第３位、Runkle (1987)のブートストラップ法が第4位と一般化して良いような結果を得ている。漸近理論に基づく正規分布の仮定は小標本では崩れることが知られているが、Kilian (1998, p.219 and Figure 1)はインパルス応答関数といった具体的な形で正規性が大幅に崩れることを示している。この点を考慮すると、正規分布を仮定しないブートストラップ法が理論的に優れていることになる。しかし、Kilian (1998)のシミュレーション実験ではモンテカルロ法の方が優れている。さらにKilian and Chang (2000) は実証研究で普通に見られるVAR次元数（4,5,7）とラグ次数（4~12）を想定した比較を行っている。Kilian (1998) のbootstrap-after-bootstrap法とSims and Zha (1999)のモンテカルロ法とが甲乙つけがたくて第１位、Lutkepohl (1990)の漸近法が第３位、Runkle (1987)のブートストラップ法が第４位といった順位づけができ、Kilian (1998)の結果と同様な順位づけになる。ところでKilian (1998)のbootstrap-after-bootstrap法は複雑であり、いわゆる計算コストが高いことから、実証研究での利用は少ない。等々、さまざまな結

果や見解が存在し、現在のところは、統一的な結論を得ることは困難である。

インパルス応答の信頼区間を得る機能が統計ソフトに備わっておらず、自分でコンピュータ・コードを書くことになると、ブートストラップ法またはモンテカルロ法を選択するものと思われる。さらに正規分布の仮定が満たされているのか否かに影響されない信頼区間を得たいのであれば、ブートストラップ法といった選択になる。

6．予測誤差の分散分解

予測誤差の分散分解は、インパルス応答分析と共にイノベーション会計の２本柱を構成している。インパルス応答分析は変数間の影響関係を簡単に説明するには細かすぎるきらいがある。変数間の影響関係を大雑把に捉えるツールとして分散分解がある。予測誤差の分散分解は、ある変数の予測できない変動に対し、他の変数がどれだけ寄与しているかの割合を求める点が特徴的である。具体的には各変数のイノベーションが予測誤差にどれだけ寄与しているかといった割合を求める。そのような寄与度は「部分的な決定係数 R^2」のような尺度になる。

単純な例として $y_t=(Y_{1t},Y_{2t})'$ とし、h期における第１変数の予測誤差を考える。イノベーションが互いに無相関になっておれば、第１変数の予測誤差の分散は、自身のイノベーションが占める変動と、他のイノベーションが占める変動とにきれいに２分割される。したがって第１変数の予測誤差分散に占める第２変数のイノベーションの寄与度が簡単に求まる。イノベーションの形で表現しているが、単純に第１変数の予測誤差分散に占める第２変数の寄与度として解釈すれば良い。このような寄与度を相対的分散寄与度（relative variance contribution, RVC）と呼ぶ。RVCは予測時点hよって変わってくるので、幾らかの時点におけるRVCを求めることになる。

変数の個数がm個の場合でも同様であり、ある変数の予測誤差がm個のイノベーションに依存することに着目し、ある変数のイノベーションがどれくらい予測誤差に影響するかを寄与度の形で計測する。具体的には次のように計測する。

$$RVC_{j\to i}\equiv\frac{\text{分母に対して第}j\text{番目変数が寄与する程度}}{\text{第}i\text{番目変数の予測誤差分散}} \tag{42}$$

つまり、相対的分散寄与度 $RVC_{j\to i}$ は第 i 番目変数の予測誤差が第j番目変数のイノベーションによってどれだけ説明できるかを表す寄与度である。変数間のイノベーションが互いに直交（無相関）であれば、予測誤差分散は互いに無相関なm個の変動にきれいに分解できる。

もう少し詳しくみていこう。t期に行うh期後の予測値を $\hat{y}_{t+h|t}$ と記し、その予測誤差を $y_{t+h}-\hat{y}_{t+h|t}$ と記すと、VMA(∞)表現を持つ定常VARの場合、予測誤差は次のようになる。

$$\begin{aligned} y_{t+h}-\hat{y}_{t+h|t}&=u_{t+h}+A_1u_{t+h-1}+A_2u_{t+h-2}+\cdots\\ &+A_{h-1}u_{t+1}=\sum_{s=0}^{h-1}A_su_{t+h-s}\quad \text{for}\quad h=1,2,\cdots \end{aligned} \tag{43}$$

したがって第i番目変数の予測誤差は選択ベクトル e_i を使って

$$y_{i,t+h}-\hat{y}_{i,t+h|t}=\sum_{s=0}^{h-1}e_i'A_su_{t+h-s} \tag{44}$$

で表現でき、予測誤差の分散は

$$\begin{aligned} MSE(\hat{y}_{i,t+h|t})&=E[(y_{i,t+h}-\hat{y}_{i,t+h|t})(y_{i,t+h}-\hat{y}_{i,t+h|t})']\\ &=\sum_{s=0}^{h-1}[e_i'A_sE(u_{t+h-s}u_{t+h-s}')A_s'e_i]\\ &=\sum_{s=0}^{h-1}(e_i'A_s\Sigma_uA_s'e_i) \end{aligned} \tag{45}$$

と求まる。

一方、第j番目のショックが第i番目の変数の予測誤差へ影響する程度は、直交インパルス応答関数の場合、

$$\sum_{s=0}^{h-1}e_i'A_sPe_j \tag{46}$$

となり、その変動は

$$\sum_{s=0}^{h-1}(e_i'A_sPe_j)^2 \tag{47}$$

となる。この場合のRVCを $RVC_{j\to i}^{O}$ と記すと、

$$RVC^{O}_{j\to i}(h)=\frac{\sum_{s=0}^{h-1}(e_i'A_sPe_j)^2}{\sum_{s=0}^{h-1}(e_i'A_s\Sigma_uA_i'e_i)}$$

$$\text{for } i,j=1,2,\cdots,m \qquad (49)$$

となる。互いに無相関（直交）となったイノベーションであることから、m 個の変数に関する合計は $\sum_{j=1}^{m}RVC^{O}_{j\to i}(h)=1$ となる。

一方、先の一般化インパルス応答関数の場合、第 i 番目変数の予測誤差は

$$\sigma_{jj}^{-\frac{1}{2}}\sum_{s=0}^{h-1}e_i'A_s\Sigma_ue_j \qquad (50)$$

となり、その変動は

$$\sigma_{jj}^{-1}\sum_{s=0}^{h-1}(e_i'A_s\Sigma_ue_j)^2 \qquad (51)$$

となる。この場合のRVCを $RVC^{G}_{j\to i}$ と記すと、

$$RVC^{G}_{j\to i}(h)=\frac{\sigma_{jj}^{-1}\sum_{s=0}^{h-1}(e_i'A_s\Sigma_ue_j)^2}{\sum_{s=0}^{h-1}(e_i'A_s\Sigma_uA_s'e_i)}$$

$$\text{for } i,j=1,2,\cdots,m \qquad (52)$$

となる。この $RVC^{G}_{j\to i}(h)$ は異なった変数間のイノベーションに相関があることから、m 個の変数に関する合計は、一般的に $\sum_{j=1}^{m}RVC^{G}_{j\to i}(h)\neq 1$ となる。

次は $RVC_{j\to i}(h)$ の計算アルゴリズムを見ていこう。いままでの議論から明らかなように、予測誤差の分散分解はインパルス応答分析の結果が利用できる。$\sum_{j=1}^{m}RVC^{O}_{j\to i}(h)=1$ を利用すれば

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{s=0}^{h-1}(e_i'A_sPe_j)^2\right]=\sum_{s=0}^{h-1}(e_i'A_s\Sigma_uA_s'e_i)$$

$$=MSR[\hat{y}_{i,t+h|t}] \qquad (53)$$

となり、第 i 番目変数の予測誤差分散 $MSR[\hat{y}_{i,t+h|t}]$ が求まる。上の式から計算の手順は自明であるが、念のため書くと、次のようになる。

(1) 第 j 番目変数から第 i 番目変数へのインパルス応答（$e_i'A_sPe_j$）を得る。

(2) インパルス応答の２乗和 $\sum_{s=0}^{h-1}(e_i'A_sPe_j)^2$ を計算する。

(3) 全ての変数に対する合計 $\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{s=0}^{h-1}(e_i'A_sPe_j)^2\right]$ を求める。

その合計は第 i 番目変数の予測誤差分散 $MSR[\hat{y}_{i,t+h|t}]$ に等しく、$RVC_{j\to i}(h)$ の分母側が求まったことになる。分子側はステップ（2）で求まっている。一方、$RVC^{G}_{j\to i}(h)$ の場合はショックとしての入力が $\sigma_{jj}^{-\frac{1}{2}}\Sigma_ue_j$ である点が異なるだけであり、計算の仕方は同様である。

このセクションを終えるにあたり、$RVC^{O}_{j\to i}(h)$ と $RVC^{G}_{j\to i}(h)$ を比べ、その利点や欠点を整理しておこう。

(1) $RVC^{O}_{j\to i}(h)$ はコレスキー行列 P を利用することから、VARの変数の順番を変えると、結果が変わることがしばしばある。しかし、$\sum_{j=1}^{m}RVC^{O}_{j\to i}(h)=1$ といった便利な性質があり、正規分布の仮定を必要としない。

(2) $RVC^{G}_{j\to i}(h)$ は並べる変数の順番に影響されない結果を得ることができる。しかし、正規分布の仮定が必要であり、さらに一般的に $\sum_{j=1}^{m}RVC^{G}_{j\to i}(h)\neq 1$ である。

7．LA-VARモデルをイノベーション会計に適用する場合の留意点

LA-VARに基づき推定を行い、拡張ラグを取り除いたレベル形VARに基づきイノベーション会計を実行していく場合は、次の基本的な問題を考える必要がある。それは伝統的なフレームワーク内で理論を整理してから考えた方が良いので、ここまで議論を先延ばしにしてきた経過がある。ここまでの議論から明らかなように、イノベーション会計の理論は定常VAR過程を前提にして構築されている。定常VAR過程はVMA(∞)表現を持ち、VMA(∞) 表現はイノベーション会計の中心的な理論式になっている。そして定常VAR過程であれば、y_t のインパルス応答や予測誤差が漸近的に有限な範囲にとどまることを保証してくれる。ところでLA-VARが取り扱う時系列過程

$\{y_t\}$ は、トレンド定常過程や単位根過程（和分過程と共和分過程）を含め、様々なタイプの時系列である。単位根過程は VMA(∞) 表現を持っておらず、そのような単位根過程をイノベーション会計へ適用することは、伝統的なフレームワーク外での分析になる。

議論を具体化するため、LA-VARモデルから拡張ラグのみを取り除き、定数項とタイムトレンド項を含めた次の定式化を考える。

$$y_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 t + \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \cdots + \Phi_k y_{t-k} + u_t \quad (54)$$

これは次のように書ける。

$$\Phi(L) y_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 t + u_t \quad (55)$$

前節と異なり、ここではタイムトレンド項 t が含まれている点が異なる。この定式化に基づき、イノベーション会計の議論を進める。(55)式から次のことが読み取れる。$\{u_t\}$ は定常であるから、$\{y_t\}$ が非定常となるのは、確定的なトレンド $\Gamma_1 t$ を持っている場合と、$\Phi(L)$ が単位根を持っている場合である。非定常となる要因が２つあることを(55)式は示している。

まず、時系列過程が単位根を持っているか否かでイノベーション会計の理論が大きく２つに分かれるので、そのあたりのことを整理する。時系列過程に関する基本的な前提は、

(1)　定常過程

(2)　確定的なトレンド

(3)　確率的なトレンド

といった３要素の和として時系列過程が表現できることである。前セクションで見てきたように伝統的なイノベーション会計の理論は定常過程を前提にしている。トレンド定常過程は、「確定的なトレンド＋定常過程」といった表現を持ち、原数値から確定的なトレンドを除去すると定常過程になる。イノベーション会計ではトレンド定常過程と定常過程とは同じグループに属すると考えて良く、確定的なトレンドの有無は大きな問題にならない。上に示す定式化では $\Gamma_1 t$ が確定的なトレンドを表し、$\{y_t\}$ がトレンド定常過程の場合、s 期後の予測誤差は次のようになる。

$$\begin{aligned} y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t} = &\{\Gamma_0 + \Gamma_1(t+s) + u_{t+s} + A_1 u_{t+s-1} + A_2 u_{t+s-2} + \cdots\} \\ &- \{\Gamma_0 + \Gamma_1(t+s) + A_s u_{t-1} + A_{s+1} u_{t-2} + \cdots\} \\ = &\, u_{t+s} + A_1 u_{t+s-1} + A_2 u_{t+s-2} + \cdots + A_{s-1} u_{t+1} \end{aligned} \quad (56)$$

この予測誤差の結果は定常過程の場合の予測誤差(43)と同じである。したがって定常過程の場合と同様に、予測誤差の分散も有限の範囲に収まる。

一方、単位根過程は確率的なトレンドを持っており、「確率的なトレンド＋定常過程」と「確率的なトレンド＋確定的なトレンド＋定常過程」といった２つのケースがある。確定的なトレンドを持っている場合はドリフト付き和分過程、ない場合はドリフトなし和分過程と呼ばれる。さらに単位根過程はVARの変数間に共和分関係があるか否かで和分過程と共和分過程とに分類される。単位根過程はショックに対する波及効果が恒久的に続き、さらに予測誤差の分散も時間と共に拡大していく特徴を持っており、このような２点でトレンド定常過程や定常過程と本質的に異なる。トレンド定常過程と単位根過程との比較に関してはHamilton (1994, pp.438-444)が役立つ。

したがって時系列過程が単位根を持っていない場合の結論は次のようになる。原数値VARに基づいてイノベーション会計を実行する。トレンド定常なのか定常なのかといった差異に関しては、イノベーション会計では大きな問題にならない。

次は時系列過程が単位根を持っている場合について更に考察を行う。２つの対処法が考えられる。ひとつは伝統的なフレームワーク内でイノベーション会計を実行していく対処法である。階差形VARにするのか、ベクトル誤差修正モデルにするのかといった問題があるが、モデル変換する考え方である。モデル変換後は定常過程となっているので、豊富な理論の蓄積がある。しかし、それではLA-VARを使うことの意義や効果が薄れてしまう。既に述べたように単位根検定や共和分検定はバイアスを含んでいることが多く、そのような事前的なバイアスを避けるのが、そもそもの始まりであった。このようなことを考えると、矛盾を感じる。別の対処法は時系列過程が単位根を持っている場合でもモデル変換を行わずに、定数項やトレンド項を含んだ

原数値VARに基づいてイノベーション会計を実行していく対処法である。そこではVMA(∞)表現が存在せず、理論の蓄積も少ない。何か役立つような情報はないものであろうか。

イノベーション会計に関する直接的な議論ではないが、単位根過程の場合でも原数値VAR（レベル形VAR）を用いるのか、それとも伝統的な階差形VARを用いるのかに関する情報はある。Sims et al. (1990)は、トレンド定常過程や単位根過程を含め、時系列の性質に関わりなく、ベイズのアプローチに基づき、原数値VARから一致推定量を求める道筋を示している。Hamilton (1994, pp.464-472)はSims et al.の議論を比較的わかりやすく解説している。時系列の性質に関わりなく原数値VARで推定するということは、原数値VARに基づいてイノベーション会計を行うことが含意されている。

さらに次の事実も考慮する必要がある。インパルス応答関数は、ショックに対する原数値変数 y_t の応答として定義されている。ショックに対する Δy_t の応答ではない。したがって推定の場面における従属変数が階差形 Δy_t であっても、インパルス応答分析ではショックに対する原数値変数 y_t の応答を報告している例がある。このような例としてはLutkepohl (2005, pp.262-265)やBenkwitz et al. (2001)が参考になる。LA-VARモデルの場合は、単位根過程であっても、推定の場面における従属変数が原数値変数 y_t のままであり、その係数推定値をイノベーション会計へ直接的に適用できる利便性がある。このような利便性を放棄する積極的な理由は見つからない。

また、Ashley and Verbrugge（2009）は、「レベル形」対「階差形」といった違いがグランジャー因果性検定とインパルス応答区間推定にどのように影響するかに関し、シミュレーション実験を行っている。グランジャー因果性などのモデル定式化テストではレベル形は避けるべきであり、インパルス応答の区間推定ではレベル形の方が優れた結果を示すといった方向性を得ている。彼らはKurozumi and Yamamoto (2000)に基づくModified LA-VARも使用している。それは左辺の従属変数がレベル形、右辺のラグ付き従属変数が階差形になっているのが特徴的である。そのModified LA-VARは、モデル定式化テストでも、またインパルス応答関数の区間推定でも、良い結果を示すことを見つけている。Toda and Yamamoto (1995) のLA-VARには、Kurozumi and Yamamoto (2000)のようなバリエーションもあるということで、議論を進めよう。Ashley and Verbruggeの結果は、タイムトレンド項の有無がインパルス応答の信頼区間にどのように影響するかも示している。VMA(∞)表現に基づく理論ではタイムトレンド項の有無は予測誤差や予測誤差分散に影響しないので、インパルス応答の信頼区間も変化しないと考えがちである。そのような考えが誤りであることを彼らの結果は示している。つまり、タイムトレンド項の有無はインパルス応答の信頼区間に影響する。その一方で、サンプル数が大きくなる程、タイムトレンド項の有無に基づく信頼区間の差異が小さくなることも示している。

以上のことを考慮し、単位根過程の場合に関し、モデル変換するのか否かについての方向性の結論を得ることにしよう。単位根過程に関する幾らかの性質を承知の上で、原数値VAR（レベル形VAR）に基づき、イノベーション会計を実行していくのが良い。ただし、時系列過程 $\{y_t\}$ が単位根を持っているか否かの情報は必要、かつ重要であり、その知識はイノベーション会計の結果を解釈するときに役立つ。

したがってイノベーション会計の手続きの大筋は次のようになる。まず、LA-VARモデルをOLSで推定し、拡張ラグを取り除いたイノベーション会計用VARモデルを得る。それは定数項やトレンド項などの確定的要素を含めた原数値VAR（レベル形VAR）である。当然のことながら、有意性検定においてトレンド項や季節ダミーが有意でない場合は、それらをモデルから外す。そしてイノベーション会計用VARモデルにショックを与え、y_t への波及効果を時間経過の中で見ていく。その結果を利用し、インパルス応答分析を行ったり、予測誤差の分散分解を行ったりする。なお、LA-VARモデルをOLSで推定すると述べたが、LA-VARモデルが非線形モデルとなる場

合は、それに応じたLA-VARモデルの定式化と推定法を選ぶことは自明であろう。

8．おわりに

Toda and Yamamoto (1995)のLA-VARモデルは、単位根の次数だけVARのラグを拡張する特徴を持ち、推定の効率性が落ちるものの、単位根や共和分の有無に関わらず、原数値VAR（レベル形VAR）を使って分析が行える利点がある。LA-VARの利用は一致性の得られる形で係数が推定でき、単位根検定や共和分検定といった事前的なバイアスを避け、標準的なWald検定が直接的に実行できる。そのようなLA-VARをイノベーション会計へ利用するのは自然な適用であるが、その道筋では様々な疑問や困難が生じる。そのような疑問や困難の解消を目指し、本稿ではロードマップ的な情報を提供した。

ロードマップ的な情報には次のような情報が含まれている。まず、定数項・タイムトレンド項・季節ダミーなどの確定的要素をイノベーション会計用モデルに含めるか否かに関し、考察を行った。直感的にはイノベーション会計の結果へ影響しないが、理論的な考察を行った。時系列過程が単位根を持っていなければVMA(∞)表現を持ち、VMA(∞) 表現によれば、確定的要素の有無はイノベーション会計の結果へ影響が与えないことが確認できた。しかし、イノベーション会計は仮説検定と異なり、そもそもは分析対象の変数の変動を調べる分析であること、VMA(∞)表現は漸近的な近似式であること、確定的要素の有無は係数推定量の共分散行列を変えること、等々を考慮し、イノベーション会計では確定的要素を含めた原数値VAR（レベル形VAR）で行うのが良い。このような結論を得ることができた。

確定的要素をイノベーション会計用モデルに含めると、グランジャー因果性検定の場合の共分散行列が転用できず、新たに計算する必要がある。確定的要素の有無は共分散行列を通じてインパルス応答の信頼区間等へ影響する。そのような確定的要素の有無に簡単に対応できるような共分散行列の表現を使うと共に、そこに表れる複雑な行列に対する実用的な計算法を示した。その詳しい情報は付録に含まれている。

一方、時系列過程が単位根を持っておればVMA(∞) 表現が存在せず、単位根過程のイノベーション会計への適用は伝統的な理論の領域外となる。したがって２つの対処法が考えられる。ひとつはモデル変換して定常な環境の中でイノベーション会計を行う伝統的な対処法である。もう一つはモデル変換しないで原数値VARのままでイノベーション会計を行う対処法である。単位根過程はショックに対する波及効果が恒久的に続き、さらに予測誤差の分散も時間と共に拡大していく特徴を持っている。このような単位根過程の性質を理解した上で、LA-VARの利点を生かすためにも、原数値VARのままでイノベーション会計を行う対処法が良いとの結論を得た。

インパルス応答分析では直交インパルス応答関数と一般化インパルス応答関数とを比べ、利点や欠点を整理した。特に組立て問題に対する一般化インパルス応答関数の対処法に焦点を置き、次の点を明らかにした。まず、震源地となるショックのみを所与とすることにより、どの変数（方程式）で新しい変化が生じたか識別できるようにする。さらに$E(u_t | u_{jt} = \delta_j)$の形で誘導ショック間の相関も考慮する。これら２点により、組立て問題に対する解決策を図っている。また、Σ_uの列を一個づつ取り出してインパルス応答を計算することから、変数の順序に影響されないインパルス応答関数になっている。この点は重要であり、なぜ、変数の順序に影響されないのかを理解する上でのキーポイントになっている。

（2013年５月20日受付、2013年７月16日受理）

注

1）本稿ではLA-VARのイノベーション会計への利用に焦点をおくため、組立て問題に対するSwanson and Granger (1997)の対処法を紹介しなかったが、それは注目に値する。

2）「bootstrap」には次のような逸話や比喩があ

る。ほらふき男爵が沼に落ちたときに靴のひもを引いて自分を引き上げたとの逸話がある。このことから、「自分で努力して困難から抜け出すこと」や「自動実行すること」の比喩に「bootstrap」が使われている。ここでの内容では観測された一つの標本から多数の擬似標本を再生するという復元抽出の考え方を比喩していると思われる。

付録：２次形式 $X'QX$ に関する補足説明と証明

Toda and Yamamoto (1995)に従ってLA-VARモデルの右辺に含まれる変数を３つ (τ, X, Z) に分割すれば、彼らが示すところの２次形式 $X'QX$ は次のように書くことができる。

$$X'Q_{\tau Z}X$$

$$Q_{\tau Z} = Q_\tau - Q_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'Q_\tau$$

$$Q_\tau = I_T - \tau(\tau'\tau)^{-1}\tau'$$

ただし、I_Tは$T \times T$ の単位行列である。記号による混乱を避けるため、$W = (\tau, Z)$と置き、(τ, X, Z)に代えて(X, W)と２分割すれば、２次形式 $X'QX$ は次のように書くことができる。

$$X'Q_W X$$

$$Q_W = I_T - W(W'W)^{-1}W'$$

この付録では２次形式$X'QX$の意味を説明すると共に$Q_W = Q_{\tau Z}$であることを示す。

まず、準備として次のような標準的な回帰モデルを考える。

$$y = X\beta + u$$

ただし、yは$T \times 1$の従属変数データ、Xは$T \times k$の説明変数データで$rank(X) = k$ 、β は$k \times 1$の回帰係数ベクトル、uは $T \times 1$の誤差項ベクトルとする。この想定において$X(X'X)^{-1}X'$ は$T \times T$ の射影行列（projection matrix）を呼ばれることから、P_X と記す。一方、$I_T - P_X = I_T - X(X'X)^{-1}X'$ は P_X に対して直交となる行列で、Q_Xと記す。$P_X y$ は通常最小２乗推定法（OLS）により従属変数yを説明変数Xに回帰させたときのyの推定値 $\hat{y}$となり、$Q_X y$ はyの残差 $y - \hat{y}$となる。この残差を$\tilde{y} = y - \hat{y}$と記すことにする。P_Xも Q_Xもべき等行列（idempotent matrix）であることから$A^2 = A$といった性質がある。さらに対称行列であることから $A' = A$ の性質もある。したがってyをXに回帰させたときの残差２乗和は

$$\tilde{y}'\tilde{y} = (Q_X y)'Q_X y = y'Q_X' Q_X y$$
$$= y'Q_X Q_X y = y'Q_X y$$

と書ける。

このような視点から先の２次形式 $X'Q_W X$を見ると、その内容が容易に理解できる。XをWに回帰させたときの残差$Q_W X$ を $\tilde{X}_W$と記すと、残差$\tilde{X}_W$同士の積から

$$\tilde{X}_W' \tilde{X}_W = X'Q_W' Q_W X = X'Q_W X$$

が得られる。したがって $X'Q_W X$ はXからWの影響を取り除いた後の「X変動」のような情報を含んでいる。

一方、次の２段階の回帰を考える。

(1)　Xを τ に回帰して残差 $Q_\tau X = \tilde{X}_\tau$ を得る。

(2)　Zを τ に回帰して残差 $Q_\tau Z = \tilde{Z}_\tau$ を得る。

(3)　そして$\tilde{X}_\tau$を$\tilde{Z}_\tau$に回帰して第２段目の残差 $Q_{\tilde{Z}}\tilde{X}_\tau = \tilde{\tilde{X}}_{\tau Z}$を得る。

このような２段階回帰の残差 $\tilde{\tilde{X}}_{\tau Z}$ 同士の積からは次の結果が得られる。

$$\tilde{\tilde{X}}_{\tau Z}' \tilde{\tilde{X}}_{\tau Z} = (Q_{\tilde{Z}}\tilde{X}_\tau)'Q_{\tilde{Z}}\tilde{X}_\tau = \tilde{X}_\tau' Q_{\tilde{Z}}' Q_{\tilde{Z}}\tilde{X}_\tau = \tilde{X}_\tau' Q_{\tilde{Z}}\tilde{X}_\tau$$
$$= X'Q_\tau'[I_T - \tilde{Z}_\tau(\tilde{Z}_\tau'\tilde{Z}_\tau)^{-1}\tilde{Z}_\tau']Q_\tau X$$
$$= X'Q_\tau'[I_\tau - Q_\tau' Z(Z'Q_\tau' Q_\tau Z)^{-1}Z'Q_\tau']Q_\tau X$$
$$= X'[Q_\tau' Q_\tau - Q_\tau' Q_\tau Z(Z'Q_\tau' Q_\tau Z)^{-1}Z'Q_\tau' Q_\tau]X$$
$$= X'[Q_\tau - Q_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'Q = X'Q_{\tau Z}X$$

このような２段階の回帰であろうが、先の１段階の回帰であろうが、Xの残差は τ とZの影響を除去した後の情報を含むものであることに変わりはない。したがって $\tilde{X}_W = \tilde{\tilde{X}}_{\tau Z}$、さらに $X'Q_W X = X'Q_{\tau Z}X$、そして$Q_W = Q_{\tau Z}$と結論づけることはできる。とは言うものの、ここでは行列の演算により、$Q_W = Q_{\tau Z}$であることを示そう。その際には区分逆行列に関する次の定理を用いる。

定理１

正方行列Aを次に示すように2×2に分割する。

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

A_{11} と（$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$）が共に正則行列（非特異行列）であるとき、$A$は正則行列であり、その逆行列は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

で与えられる。ただし、

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$$
$$B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}$$
$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}$$
$$B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}$$

である。さらに A_{22} も正則行列（非特異行列）の場合は

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

と表される。

この定理については、Harville (1997, p.99)、Judge et al. (1980, p.947)、Greene (2000, p.34) が参考になる。それでは Q_W から出発し、$Q_{\tau Z}$ を導出する。

$$Q_W = I_T - W(W'W)^{-1}W'$$
$$= I_T - \begin{pmatrix}\tau & Z\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\tau' \\ Z'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau & Z\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}\tau' \\ Z'\end{pmatrix}$$
$$= I_T - \begin{pmatrix}\tau & Z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau'\tau & \tau'Z \\ Z'\tau & Z'Z\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\tau' \\ Z'\end{pmatrix}$$

定理 1 に従い、逆行列の要素を次のように置く。

$$Q_W = I_T - \begin{pmatrix}\tau & Z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau' \\ Z'\end{pmatrix}$$

その結果、次の表現を得ることができる。

$$Q_W = I_T - (\tau B_{11}\tau' + ZB_{21}\tau' + \tau B_{12}Z' + ZB_{22}Z')$$

Q_W を構成する各要素の内部構造を調べるが、B_{22} からスタートする。

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} = [Z'Z - Z'\tau(\tau'\tau)^{-1}\tau'Z]^{-1}$$
$$= [Z'\{I - \tau(\tau'\tau)^{-1}\tau'\}Z]^{-1}$$
$$= [Z'(I - P_\tau)Z]^{-1} = (Z'Q_\tau Z)^{-1}$$

ただし、$P_\tau = \tau(\tau'\tau)^{-1}\tau'$ 、$Q_\tau = I - P_\tau$ である。

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}$$
$$= (\tau'\tau)^{-1} + (\tau'\tau)^{-1}\tau'Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'\tau(\tau'\tau)^{-1}$$
$$B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1} = -(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'\tau(\tau'\tau)^{-1}$$
$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} = -(\tau'\tau)^{-1}\tau'Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}$$

さらに次の要素を調べる。

$$ZB_{22}Z' = Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'$$

$$\tau B_{11}\tau' = \tau[(\tau'\tau)^{-1} + (\tau'\tau)^{-1}\tau'Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'\tau(\tau'\tau)^{-1}]\tau'$$
$$= \tau(\tau'\tau)^{-1}\tau' + \tau(\tau'\tau)^{-1}\tau'Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'\tau(\tau'\tau)^{-1}\tau'$$
$$= P_\tau + P_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'P_\tau$$

$$ZB_{21}\tau' = Z(-B_{22}A_{21}A_{11}^{-1})\tau' = Z[-(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'\tau(\tau'\tau)^{-1}]\tau'$$
$$= -Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'P_\tau$$

$$\tau B_{12}Z' = \tau(-A_{11}^{-1}A_{12}B_{22})Z' = \tau[-(\tau'\tau)^{-1}\tau'Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}]Z'$$
$$= -P_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'$$

そして Q_W は次のように展開される。

$$Q_W = I_T - [P_\tau + P_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'P_\tau] + [Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'P_\tau]$$
$$+ [P_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'] - [Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z']$$
$$= (I_T - P_\tau) + \{[Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'P_\tau] - P_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'P_\tau\}$$
$$- \{[Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'] - [P_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z']\}$$
$$= (I_T - P_\tau) + (I_T - P_\tau)Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'P_\tau$$
$$- (I_T - P_\tau)Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'$$
$$= Q_\tau + Q_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'P_\tau - Q_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'$$
$$= Q_\tau - Q_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'(I_T - P_\tau)$$
$$= Q_\tau - Q_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'Q_\tau = Q_{\tau Z}$$

したがって $Q_W = Q_{\tau Z}$ である。

参考文献

Asai, M. and T. Shiba (1996), "The Japanese Stock Market and Macroeconomy: An Empirical Investigation, "*Financial Engineering and the Japanese Markets*, Vol. 2, pp. 259-267.

Ashley, Richard and Randal J. Verbrugge (2009), "To Difference or Not to Difference: a Monte Carlo Investigation of Inference in Vector Autoregression Models," *International Journal Data Analysis Techniques and Strategies*, Vol. 1, No. 3, pp. 242-274.

Benkwitz, Alexander, Helmut Lutkepohl, and Jurgen Wolters (2001), "Comparison of Bootstrap Confidence Intervals for Impulse Responses of German Monetary System, " *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 5, No. 1, pp. 81-100.

Dickey, D.A. and W.A. Fuller (1981), "Likelihood Ration Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Econometrica*, Vol. 71, pp. 1269-1286.

Elliott, G., T.J. Rothenberg, and J. Stock (1996), "Efficient Tests for Autoregressive Unit Root," *Econometrica*, Vol. 64, pp. 813-836.

Greene, William H. (2000), *Econometric Analysis*, New Jersey: Prentice Hall.

Griffiths, William and Helmut Lutkepohl (1993), "Confidence Intervals for Impulse Responses from VAR Models: A Comparison of Asymptotic Theory and Simulated Approaches," manuscript, Institute for Statistics and Econometrics, Humboldt University, Berlin.

Hamilton, James D. (1994), *Time Series Analysis*, New Jersey: Princeton University Press.

Harville, David A. (1997), *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*, New York: Springer.

Hayashi, Fumio (2000), *Econometrics*, Princeton University Press.

Judge, George G. et al. (1985), *The Theory and Practice of Economics*, Second Edition, New York: John Wiley Sons.

Kilian, Lutz (1998), "Small-Sample Confidence Intervals for Impulse Response Functions" *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 80, pp. 218-230.

Kilian, Lutz (2001), "Impulse Response Analysis in Vector Autoregressions with Unknown Lag Order," *Journal of Forecasting*, Vol. 20, pp. 161-179.

Kilian, Lutz, and Pao-Li Chang (2000), "How Accurate are Confidence Intervals for Impulse Responses in Large VAR Models?" *Economic Letters*, Vol. 69, pp. 299-307.

King, Robert G., Charles I. Plosser, James H. Stock, and Mark W. Watson (1991), "Stochastic Trends and Economic Fluctuations," *The American Economic Review*, Vol. 81, No. 4, pp. 819-840.

Koop, Gary, M. Hashem, and Simon M. Potter (1996), "Impulse Response Analysis in Nonlinear Multivariate Models, "*Journal of Econometrics,* Vol. 74, pp. 119-147.

Kurozumi, Eiji and Taku Yamamoto (2000), "Modified Lag Augment Vector Autoregressions," *Econometric Reviews*, Vol.19, No.2, pp.207-231.

Lutkepohl, Helmut (1991), *Introduction to Multiple Time Series Analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag.

Lutkepohl, Helmut (2000), "Bootstrapping Impulse Responses in VAR Analyses," Working Paper, Humboldt University, Berlin.

Lutkepohl, Helmut (2005), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer.

Ng, S. and P. Perron (2001), "Lag Length Selection and the Construction of Unit Root Tests With Good Size and Power," *Econometrica*, Vol. 69, pp. 1519-1554.

Pesaran, H. H. and Y. Shin (1998), "Generalized Impulse Response Analysis in Linear Multivariate Models, " *Economics Letters*, Vol. 58, pp. 17-29.

Runkle, David (1987), "Vector Autoregressions and Reality, " *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 5, No. 4, pp. 437-454.

Sims, Christopher A. (1980 a), "Macroeconomics and Reality," *Econometrica*, Vol. 48, No. 1, pp. 1-48.

Sims, Christopher A. (1980 b), "Comparison of Interwar and Postwar Business Cycles: Monetarism Reconsidered," *American Economic Review*, Vol. 70, pp. 250-257.

Sims, Christopher A., James H. Stock, and Mark W. Watson (1990), "Inference in Linear Time Series Models with Some Unit Roots," *Econometrica*, Vol. 58, No. 1, pp. 113-144.

Sims, Christopher A. and Tao Zha (1999), "Error Bands for Impulse Responses," *Econometrica,* Vol.67, pp. 1113-1156.

Soytas, Ugur and Engin Kucukkaya (2011), "Economic Growth and Financial Devepoment in Turkey: New Evidence," *Applied Economic Letters*, Vol. 18, pp. 595-600.

Stock, James H. and Mark W. Watson (2001), "Vector Autoregressions," *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 15, No. 4, pp. 101-115.

Swanson, Norman R. and Clive W. J. Granger (1997), "Impulse Response Functions Based on a Causal Approach to Residual Orthogonalization in Vector Autoregressions," Journal of the American Statistical Association, Vol. 92, No. 437, pp. 357-367.

Toda, Hiro Y. and Taku Yamamoto (1995), "Statistical Inference in Vector Autoregressions with Possibly Integrated Processes, "*Journal of Econometrics*, Vol. 66, pp. 225-250.

Yamada, Hiroshi and Hiro Y. Toda (1998), "Inference in Possibly Integrated Vector Autoregressive Models: Some Finite Sample Evidence," *Journal of Econometrics*, Vol. 86, pp. 55-95.

羽森茂之（2000）,『計量経済学』, 中央経済社.

中川竜一（2002）,「日本における金融政策の効果波及経路―1977年～1999年のマクロデータを用いた実証研究―」『国民経済雑誌』, Vol. 185, No.3, pp. 1-20.

曲明輝（2006）,「銀行貸出、中小企業の設備投資と実態経済（2）」『経済論行（京都大学）』, Vol. 177, No. 3, pp. 76-91.

山本拓（1988）,『経済の時系列分析』, 創文社.

Innovation Accounting Based on the LA-VAR Model

Hiroshi　MURAO

Abstract

This paper provides road map information with regard to the application of the lag augmented vector autoregressive (LA-VAR) model to innovation accounting such as impulse response analysis and forecast error variance decomposition. Toda and Yamamoto (1995) developed the LA-VAR model and showed how to use it for Granger-causality hypothesis tests. Using the LA-VAR model, we can get consistent estimation of the level VAR under various types of time series including unit-root series, without suffering from biases of preliminary hypothesis tests. Thus, we are interested in using the LA-VAR model for innovation accounting as well as Granger-causality hypothesis tests. In the course of innovation accounting, we face several questions and difficulties. A question is how we compute the confidence interval of impulse response analysis based on the LA-VAR model. It is not a trivial question if we investigate the task. Another question is whether we use the level VAR or the integrated VAR if the time series has unit root. The traditional VAR literature suggests to using the integrated VAR if the time series has unit root. If we use the integrated VAR, then it kills the benefits of the LA-VAR. This paper provides road map information for solving such questions and difficulties.