青森公立大学経営経済学研究
第14巻第1号（2008）

重複世代モデルにおける最適人口成長率の再検討

木立　　力※

1　はじめに

日本や東アジア諸国では合計特殊出生率が低下し、老年人口あたりの生産年齢人口の比率が低下することによって、さまざまな労働者の負担が増加すると予想されている。他方、人口成長率が高いために、一人当たりの資本装備が高まらず、生活水準が向上しない発展途上国もある。このように人口成長率が低いことが問題とされる場合があれば人口成長率が高いことが問題とされる場合もある。はたして中庸の人口成長率というものはあるのだろうか。

こうした問題に対して、Diamond（1965）の資本と労働を生産要素とする重複世代モデルは、基礎となる考え方を提供する。ダイヤモンドのモデルは、就労期と引退期の生涯期間の区分があり、貯蓄はライフサイクル貯蓄である。それは、生産要素が労働だけだが、就労期と引退期の区分があるSamuelson（1958）の消費貸借モデルと、生産要素が労働と資本からなるが、生涯期間の区分がないSolow（1956）のモデルの特徴を併せ持っている。この両面性は人口成長率との関連で重要な意味を持っている。

Samuelson（1975）の「最適人口成長率」と題する論文では序論において次のような内容が述べられている。ソローのモデルでは、人口成長率が低いほど生産物のうち投資に回す量が少なくてすむので、定常状態の消費は高くなる。これと対照的にサムエルソンの消費貸借モデルでは、人口成長率が高いほど引退者は多くの子供（働き手）に支えられるので、定常状態の消費水準は高くなる。就労期と引退期の2期間の生涯で、生産要素が資本と労働からなるダイアモンドの重複世代モデルでは効用を最大にする人口成長率があるだろう、というのである。後にMichel and Pestieau（1993）は、人口成長率が高いことにより、一人当たり資本が少なくなる影響を「資本希薄化効果」"capital-dilusion effect"、引退者が多くの働き手に支えられる影響を「世代間移転効果」"intergenerational transfer effect"と呼んだ。

Samuelson（1975）は、所与の人口成長率におけるダイヤモンド型の重複世代モデルの黄金律での効用水準を求め、パラメータとしての人口成長率を変化させ効用水準が最大となる人口成長率の1階条件を求めた。ところが、Deardorff（1976）は効用関数、生産関数ともコブ・ダグラス型のケースについて、2階条件を求め、それが効用水準を最小化する人口成長率である、と指摘した。Samuelson（1976）は、この指摘を認めると共に、効用関数や生産関数の代替の弾力性が1以外の場合には、最小値とならない可能性に言及している。

その後、これを受け、Michel and Pestieau（1993）は、コブ・ダグラス型を含むCES型の効用関数とCES型の生産関数との組み合わせの重複世代モデルの一般均衡について最適人口成長率の存在を検討した。ところが、効用関数、生産関数がともにコブ・ダグラスのケースについては、効用最小の内点の人口成長率が得られたDeardorff（1976）と異なり、効用は人口成長率について、資本分配率と時間選好率とによって場合分けされ、単調減少、一定、単調増加となることが示された。

小論の目的は、２つの論文の間で結論が異なる原因は何か、また、その点を修正した場合に、CES型関数の重複世代モデルの最適人口成長率はどのように修正されるのかを示すことである。CES型生産関数は理論モデルでしばしば仮定される稲田条件が一般には成立せず、それゆえに特徴的な結果につながるが、実証研究などでよく用いられるため、CES型関数の場合の重複世代モ

※青森公立大学教授

デルの特性を明らかにする意義がある。

2節では、2つの論文の結論が異なった原因について述べ、3節では、最適人口成長率の考え方をMichel and Pestieau（1993）に沿って整理し、独自に図解する。4節では、3節のモデルのもとで、最適人口成長率の有無について修正した結果を明らかにする。5節では、資本減耗と負の人口成長率について述べる。

2　資源制約式と生産の定義

政府介入がない市場均衡は必ずしも黄金律とはならないが、適切な量の世代間移転政策によって、所与の人口成長率について黄金律に至ることがIhori（1978）などによって示されている。「市場均衡」と「適切な量の世代間移転政策」を合わせた結果、黄金律が達成されるが、それは計画経済の最適化の結果と同じものである。したがってこの問題は、所与の人口成長率の下での計画経済の最適化の結果について、さらに効用最大となる人口成長率を求める問題となる。

式では以下のように表わされる。家計の効用関数は次式である。

$$u = u(c_1、c_2) \tag{1}$$

ここで c_1 は就労期の消費、c_2 は引退期の消費である。一時点での就労者あたりでみた資源制約は次式である。

$$f(k) - nk = c_1 + \frac{c_2}{1+n} \tag{2}$$

ただし、k は定常状態の資本労働比率、n は定常状態の人口成長率である。上の式の左辺は生産から投資すなわち人口が成長しても資本労働比率を維持するための必要量、を差し引いた値である。この消費可能量を、右辺では就労者とその $1/(1+n)$ 倍の共存する引退者が分け合うことを表している。式（2）の制約のもとで、式（1）を、k、c_1、c_2 について最適化すると次の２つの条件式が得られる。

$$f'(k) = n \tag{3}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = 1+n \tag{4}$$

式（3）はソロー・モデルなど新古典派成長モデルに共通に見られる黄金律の条件であり、式（4）はサムエルソンの消費貸借モデルにおける生物学的利子率による消費配分を表している。サムエルソンは資源制約と２つの条件式を効用関数に代入し、それを人口成長率で微分してゼロとおくことによって、効用を最大とする人口成長率を求めた、とした。

これに対してDeardorff（1976）は、効用関数と生産関数がともにコブ・ダグラス型の場合に最適人口成長率の２階条件を求め、この場合には、効用を最小にする人口成長率であることを示した。Samuelson（1976）では、結果を修正するとともに、効用関数、生産関数が他の関数型の場合の最大、最小について考察している。

それらを受け、Michel and Pestieau（1993）では、最適人口成長率の考え方の整理を行うとともに、効用関数、生産関数がともにCES型の場合の最適人口成長率の有無について論じている。ともにコブ・ダグラス型の場合、人口成長率に関して効用水準は、パラメータによって単調増加、一定、または単調減少に分類される、という結論を得ている。

Deardorff（1976）と異なる結果になった理由は何だろうか。それは生産の仮定の相違である。Michel and Pestieau（1993）では当期の資本は1期かぎりですべて減耗し、生産関数は当期の資本分もすべて新たに生産物として生産すると定義している。この定義による生産関数を $g(k)$ とおくと、資源制約は、次式のようになる。

$$g(k) - (1+n)k = c_1 + \frac{c_2}{1+n} \tag{5}$$

また、黄金律の条件は、$g'(k) = 1+n$ となる。これらは、式（2）、式（3）と異なっている。$f(k)$ に等しい付加価値を y とすれば、$g(k)$ の生産物は $y+k$ である。

式（5）に表わされるように、こちらの生産の定義を用いれば、両辺に現れるのは $1+n$ だけ

であり、式（2）のように $1+n$ と n が混在することがなく、その結果導出される式がはるかに簡明になる。

しかし、この生産の定義による第1の短所は4節で示すように、導出される結果が一般的な生産の定義の場合の導出結果を読み替える程度ではなく、著しく異なることである。第２の短所は、通常の国民経済計算の生産の定義と異なるので、近年よく行われる重複世代モデルに依拠した実証研究やシミュレーションの理論基礎として結果を参照できないことである。

3　最適人口成長率の考え方

以下ではMichel and Pestieau（1993）の整理した内容を紹介するとともに独自の図解を示すが、生産の定義は一般的に用いられるものに替えている。資源制約式は前節の式（2）と同様である。

以下で用いるCES型の効用関数の無差別曲線は相似拡大型であるから、（ c_1 、c_2 ）平面での資源制約式の傾きと右上方位置とが無差別線の接点に及ぼす影響は独立である。次式以降で定義するように、所与の人口成長率 n についての「最大効用水準」は、式（3）の黄金律を満たす「最大消費可能量」と所得が１の場合に式（4）の限界代替率の条件を満たす「最大単位効用」の積で表わされる。

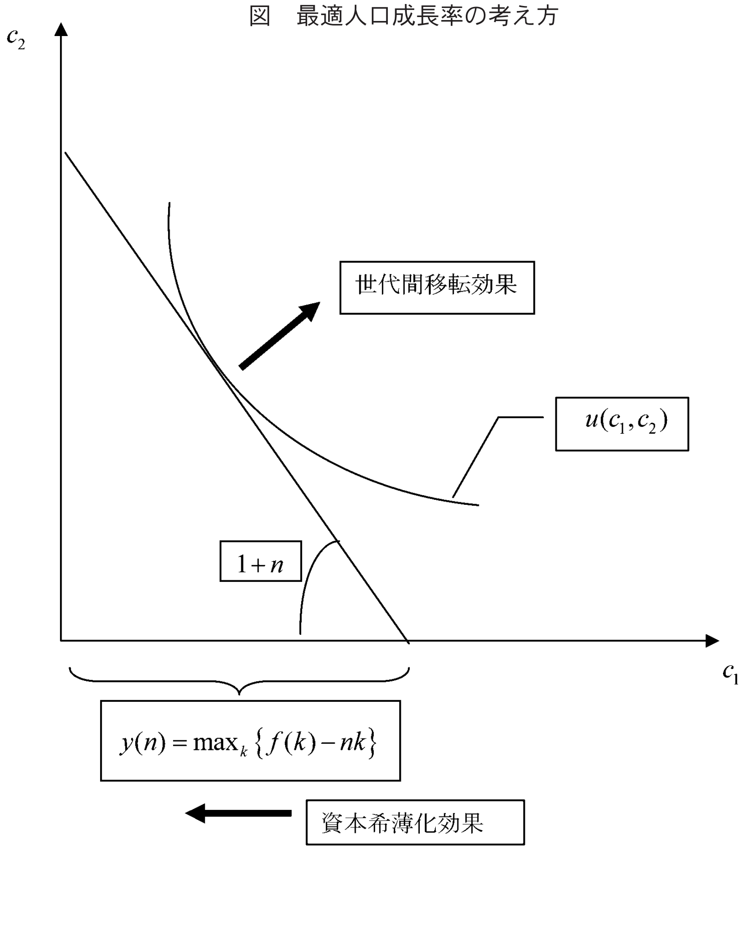
最大消費可能量は、黄金律の式から k を n の式で表わし、$f(k)-nk$ に代入して、次式のように n だけの関数 $y(n)$ と表わす。

$$y(n)=\max_{k}(f(k)-nk) \tag{6}$$

また、所得が１の予算制約のときに達成される最大単位効用を n だけの関数 $\phi(n)$ で表す。

$$\begin{aligned}&\phi(n)=\max_{c_1}(u(c_1、c_2))\\&st.(1=c_1+\frac{c_2}{1+n})\end{aligned} \tag{7}$$

図　最適人口成長率の考え方



人口成長率 n が高い場合には、多くの投資を必要とするため $y(n)$ は小さくなる。この項は資本希薄化効果に対応する。人口成長率が高い場合には、多くの引退後消費が可能となるので $\phi(n)$ は大きくなる。この項は世代間移転効果に対応する。n の関数である最大効用 $V(n)$ は、両者の積であり次式で定義される。

$$V(n) = \phi(n)y(n) \tag{8}$$

図は資本希薄化効果と世代間移転効果のトレード・オフを表している。

4　CES型重複世代経済の最適人口成長率

効用関数を次式のように表わす。

$\sigma \neq 1$:

$$u(c_1、c_2) = (c_1^{1-1/\sigma} + \beta c_2^{1-1/\sigma})^{\sigma/(\sigma-1)} \tag{9}$$

$\sigma = 1$:

$$u(c_1、c_2) = (c_1 c_2^{\beta})^{1/(1+\beta)} \tag{10}$$

ただし σ は異時点間の代替弾力性で正の定数である。β は割引因子であり、ρ を時間選好率 $(\rho > 0)$とすると$\beta = \frac{1}{1+\rho}$であるから、$0 < \beta < 1$ である。

上の効用関数に対応して、所得が1のときの予算制約の下で、効用最大化した結果導かれる最大単位効用 $\phi(n)$ は次のように表わされる。

$\sigma \neq 1$:

$$\phi(n) = (1 + \beta^{\sigma}(1+n)^{\sigma-1})^{1/(\sigma-1)} \tag{11}$$

$\phi(0) = (1+\beta^{\sigma})^{1/(\sigma-1)}$ の増加関数である。

$\sigma = 1$:

$$\phi(n) = \frac{(\beta(1+n))^{\beta/(1+\beta)}}{1+\beta} \tag{12}$$

$\phi(0) = \frac{\beta^{\beta/(1+\beta)}}{1+\beta}$ の増加関数である。

生産関数を次式のように表わす。

$\tau \neq 1$:

$$f(k) = A(b + k^{1-1/\tau})^{\tau/(\tau-1)} \tag{13}$$

$\tau = 1$:

$$f(k) = Ak^{\alpha} \tag{14}$$

ただし τ は代替の弾力性で正の定数である。A、b は正の定数、α は資本分配率で $0 < \alpha < 1$ の定数である。

これらの生産関数に対応して、導出される最大消費可能量 $y(n)$ は次式以降に場合分けされる。

$\tau > 1$ and $n \leq A$:

$\forall k$、$f(k) > Ak$ であるから、$n \leq A$の範囲にある所与の n について、k が大きいほど $f(k) - nk$は大きくなるので、$y(n) = +\infty$ となる。

$$y(n) = +\infty \tag{15}$$

$\tau = 1$:

$$y(n) = \frac{1-\alpha}{\alpha}(\alpha A)^{1/(1-\alpha)} n^{-\alpha(1-\alpha)} \tag{16}$$

$\lim y(n)_{n\to+0} = +\infty$ の減少関数である。

$\tau < 1$ and $n \geq A$:

$$y(n) = 0 \tag{17}$$

$\tau < 1$ and $n \leq A$:

$$y(n) = Ab^{-\tau/(1-\tau)}(1 - (\frac{n}{A})^{1-\tau})^{1/(1-\tau)} \tag{18}$$

$0 < n \leq A$、において $Ab^{-\tau/(1-\tau)} > y(n) \geq 0$ の減少関数である。

効用関数、生産関数の代替の弾力性によって最大単位効用 $\phi(n)$ と最大消費可能量 $y(n)$ がそれぞれに分類されたので、両者の積である最大効用 $V(n)$ は両者の組み合わせ数に分類される。しかし $y(n)$ の影響が強い分類となる。導出過程は補論に示した。

(1) $\tau > 1$ の場合の $V(n)$

$n \leq A$ の範囲にある所与の n について

$V(n) = +\infty$ となる。

(2) $\tau = 1$ の場合の$V(n)$

生産関数がコブ・ダグラス型の以下の場合にはいずれも、lim $V(n)_{n\to 0} = +\infty$ となる。

(2-1) $\tau = 1$、$\sigma = 1$ の場合の $V(n)$

$y(n)$ は式(16)、$\phi(n)$ は式(12)である。

$\frac{\beta}{1+\beta} \le \frac{\alpha}{1-\alpha}$ のとき、式(21)は負、すなわち$V(n)$は減少関数となる。

$\frac{\beta}{1+\beta} > \frac{\alpha}{1-\alpha}$ のとき、$V(n)$は内点で最小値をとる。

(2-2) $\tau = 1$,$\sigma \neq 1$ の場合の$V(n)$

$y(n)$ は式(16)、$\phi(n)$ は式(11)である。

(2-2-1) $\tau = 1$、$\sigma > 1$ の場合の $V(n)$

$V(n)$ は、内点で最小値をとる。

(2-2-2) $\tau = 1$、$0 < \sigma < 1$ の場合の $V(n)$

α が小さく、$\beta(<1)$が大きい場合に、$V(n)$は最小値をとることがある。これ以外の場合に、$V(n)$ は単調減少関数である.

(3)$\tau < 1$ の場合の $V(n)$

$n \ge A$の範囲では、$y(n) = 0$ となる。その結果 $V(n) = 0$ となる。 $0 < n < A$では、$V(n)$ は A が小さい場合、単調減少関数、A が大きい場合には増加関数の部分を含む。どちらの場合も n が0に近いほど $V(n)$ は大きいが上界がある。

このケースは、Michel and Pestieau(1993)の生産の仮定の場合には $V(n)$ を最大化する最適人口成長率が存在していた。

以上の結果を表にまとめた。

表　消費と生産の代替率で分類した最適人口成長率

	$\sigma<1$	$\sigma=1$	$\sigma>1$
$\tau<1$	$n \ge A$ならば$y(n)=0$となり$V(n)=0$. $n<A$ならば，nがゼロに近いほど効用は高い.		
$\tau=1$	σが1より小さく，$\frac{\beta}{1+\beta}$が小さいほど，単調減少. σが1に近く，$\frac{\beta}{1+\beta}$が大きいほど，最小値をとる.	$\frac{\beta}{1+\beta} \le \frac{\alpha}{1-\alpha}$ならば$n$について単調減少. $\frac{\beta}{1+\beta} > \frac{\alpha}{1-\alpha}$ならば$n>0$において効用最小となる$n$がある.	$n>0$において，効用最小となるnがある.
$\tau>1$	$n \le A$のとき，$y(n)=+\infty$となり$V(n)=+\infty$		

5　資本減耗の解釈

前節までで扱った人口成長率 n は正の値としていたが、第1に現実には日本でも人口成長率は既に負の値となっている。第2に、資本減耗率も考慮されていなかった。本節では小論の結果と現実との対応について示すことにする。2点を考慮したケースの人口成長率を g とおき、資本減耗率を δ とおく(減耗する場合に $\delta > 0$)。$g > -\delta$ であるかぎり人口成長率 g が負であっても、$(g+\delta)k$ だけの正の投資を行って、資本労働比率 k を維持する定常状態となりうる。したがって黄金律における消費可能量 $y(n)$ の $n>0$ については $g+\delta>0$ と定義域は変わらないので、n を解釈し直すだけでよい。

他方、世代間移転効果を表す$\phi(n)$ に現れる

$1+n$ の項は、世代間の交換比率なので減耗率とは無関係で、このケースでは $1+(g+\delta)$ ではなく $1+g$ となる。定義域は $1+g>1-\delta$ と変わる。1年の減耗率は数パーセントであっても、2期間モデルの1期間は二三十年以上とすれば δ は大きい値をとりうるが、人口も資本も負になりえないことから、理論的上限があり、$\delta<1$ である。この場合、$1+g>0$ となり、Michel and Pestieau (1993) の生産の定義の場合の $\phi(n)$ 関数と同じ定義域になり、$V(n)$ に関する結論もそれと同じになる。

資本減耗率の方は、技術進歩のあり方によっては、数十年間で、100%に近いケースがありえるとしても、その値は定常状態の人口成長率の下限を定めるだけであって、人口成長率が下限に近づくかどうかは別の問題である。人口の方は、数十年間で消滅に近づくような予測はなく、せいぜい半減するケースまで考察すれば足りると考えられる。その場合には $\phi(n)$ 関数の $1+n$ が0.5となるが、式(11)、式(12)にこの値を代入すると正の値をとる。他方 $y(n)$ は $g+\delta$ がゼロに近いならば無限大となるから、$V(n)$ が無限大か極大という結論は、資本減耗・負の人口成長率を考慮しない場合と同様と考えられる。

6　まとめ

実証研究やシミュレーションでよく用いられる、生産関数、効用関数ともCES型関数の重複世代経済における最適人口成長率について検討した。結論は次のとおりである。(1) 人口成長率が高いことによる資本希薄化効果と世代間移転効果のうち、先進国ではとくに後者が強調されがちだが、分析の結果、資本希薄化効果が総じて重要であり、人口成長率が小さいほど効用が高いケースがほとんどである。(2) 生産が前期資本分も含む場合と、付加価値部分だけとする一般的な仮定に替えた小論の場合とでは、最適人口成長率に関してかなり異なる結論となった。とくに効用を最大にする人口成長率は存在しなくなった。(3) 効用を最小化する人口成長率が存在する場合と人口成長率が小さいほど効用が高いケースだけとなった。

(2008年6月16日受付、2008年6月26日受理)

謝　辞

本稿作成にあたっては、青森公立大学の今喜典教授より有益な助言をいただきました。御礼申し上げます。なお、本稿にありうべき誤まりは筆者の責に帰するものです。

参考文献

Deardorff, A.V. (1976) "The Optimum Growth Rate for Population:Comment," *International Economic Review*, Vol.17, No.2, pp.510-515.

Diamond, P. A. (1965) "National Debt in a Neoclassical Growth Model," *The American Economic Review*, Vol.55, No.5, pp.1126-1150.

Ihori, T. (1978) "The Golden Rule and the Role of Government in a Life Cycle Growth Model," *The American Economic Review*, Vol.68, No.3, pp.389-396.

Michel, Philippe and P Pestieau (1993) "Population Growth and Optimality : When Does Serendipity Hold ? " *Journal of Population Economics*, Vol.6, No4, pp.353-62, November.

Samuelson, P. A. (1958) "An Exact Consumption-Loan Model of lnterest with or without the Social Contrivance of Money," *The Journal of Political Economy*, Vol.66, No.6, pp.467-482.

——(1975) "The Optimum Growth Rate for Population," *International Economic Review*, Vol.16, No.3, pp.531-538.

——(1976) "The Optimum Growth Rate for Population: Agreement and Evaluations," *International Economic Review*, Vol.17, No.2, pp.516-525.

Solow, R. M. (1956) "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.70, No.1, pp.65-94.

7　補　論

(1) $\tau>1$ の場合の $V(n)$

$n\leq A$ の範囲にある所与の n については、$y(n)=+\infty$ であるから、有限の $\phi(n)$ との積である最大効用も $V(n)=+\infty$ となり、n の内点で有限の最大値をとらない。

(2-1) $\tau=1$、$\sigma=1$ の場合の $V(n)$

$y(n)$ は式(16)、$\phi(n)$ は式(12)である。式の簡略化のため、単調変換である対数変換を行う。

$$\ln V(n)=\frac{\beta}{1+\beta}\ln(1+n)-\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln n+c \tag{19}$$

ただし c は定数である。微分すると次式となる。

$$\frac{V'}{V}=\frac{\beta}{1+\beta}\frac{1}{1+n}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{n} \tag{20}$$

この関数の符号は次式で決まる。

$$(\frac{\beta}{1+\beta}-\frac{\alpha}{1-\alpha})n-\frac{\alpha}{(1-\alpha)} \tag{21}$$

第2項 $\frac{\alpha}{(1-\alpha)}$ は正の定数である。Deardorff(1976)の一般的な生産の仮定ではこの第2項があり、Michel and Pestieau(1993)の場合にはこの項がないことが結論を左右している。

$\frac{\beta}{1+\beta}\le\frac{\alpha}{1-\alpha}$ のとき、式(21)は負、すなわち $V(n)$ は減少関数となる。

$\frac{\beta}{1+\beta}>\frac{\alpha}{1-\alpha}$ のとき、

$$n=\frac{(1+\beta)\alpha}{(1-\alpha)\beta-\alpha(1+\beta)}$$

において式(21)はゼロ、すなわち $V(n)$ は内点で最小値をとる。

(2-2) $\tau=1$,$\sigma\neq1$ の場合の $V(n)$

$y(n)$ は式(16)、$\phi(n)$ は式(11)である。簡略化のため、単調変換である対数変換を行う。

$$\ln V(n)=\frac{1}{\sigma-1}\ln(1+\beta^{\sigma}(1+n)^{\sigma-1}) -\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln n+c \tag{22}$$

ただし c は定数である。微分すると次式となる。

$$\frac{V'}{V}=\frac{\beta^{\sigma}(1+n)^{\sigma-2}}{1+\beta^{\sigma}(1+n)^{\sigma-1}}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{n} \tag{23}$$

この関数の符号は次式で決まる。

$$(1+n)^{\sigma-1}\{1-(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha})\frac{1}{1+n}\} -\frac{\alpha}{(1-2\alpha)\beta^{\sigma}} \tag{24}$$

資本分配率の実態を踏まえて、 $0<\alpha<0.5$ という仮定を追加すると、$(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha})>1$ である。中括弧の項を B とおくと、 $\frac{-\alpha}{1-2\alpha}<B<1$ の範囲にあり、B は n が小さいとき負の値だが、n について単調増加である。

(2-2-1) $\tau=1$、$\sigma>1$ の場合の $V(n)$

式(24)の $(1+n)^{\sigma-1}>1$ で、n について単調増加である。同式の2行目は負なので、式(24)は、中括弧が負の領域では負、中括弧が正のある値でゼロ、それ以降で正となる。よって、この場合の $V(n)$ は、内点で最小値をとる。

(2-2-2) $\tau=1$、$0<\sigma<1$ の場合の $V(n)$

$1>(1+n)^{\sigma-1}>0$ の単調減少関数で、中括弧の項 $B<1$だから、αが小さく、$\beta<1$が大きい場合に、 $\frac{\alpha}{(1-2\alpha)\beta^{\sigma}}$ が1より十分小さくなり、式(24)は正の領域を含む。この場合 $V(n)$ は最小値をとる。これ以外の場合に、$V(n)$ は単調減少関数である。

(3)$\tau<1$ の場合の $V(n)$

$\forall k$、$f(k)<Ak$ であるから、$n\ge A$ の範囲にある所与の n について、 k が小さいほど $f(k)-nk$ の負の値は絶対値で小さくなるので、$y(n)=0$ となる。その結果 $V(n)=0$ となる。

$n<A$ の範囲では、CES型生産関数の $y(n)$ は、式(18)、CES型効用関数の $\phi(n)$ は、式(11)である。これに対応する $V(n)$を対数変換したものが次式である。

$$\ln V(\ n\ )=\frac{1}{\sigma-1}\ln(1+\beta^{\sigma}(1+n)^{\sigma-1}) -\frac{1}{1-\tau}\ln(1-(\frac{n}{A})^{1-\tau})+c \tag{25}$$

微分すると次式となる。

$$\frac{V'}{V}=\frac{\beta^{\sigma}(1+n)^{\sigma-2}}{1+\beta^{\sigma}(1+n)^{\sigma-1}} -\frac{n^{-\tau}}{A^{1-\tau}-n^{1-\tau}} \tag{26}$$

$n < A$ の範囲では、上の式の分母は正であるから、分子である次式によって、符号が決まる。

$$-n^{-\tau}\left[\beta^{\sigma}(1+n)^{\sigma-1}(2-\frac{1+A^{1-\tau}n^{\tau}}{1+n})+1\right] \tag{27}$$

$0 < n < A$ において $-n^{-\tau}$ は負で単調増加、$-\infty < -n^{-\tau} < -A^{-\tau}$ である。 $\beta^{\sigma}(1+n)^{\sigma-1}$ は、 $\sigma > 1$ の場合に単調増加、$\sigma = 1$ すなわちコブ・ダグラス型の場合に定数、$\sigma < 1$ の場合に単調減少関数であるが、いずれの場合も正である。$\frac{1+A^{1-\tau}n^{\tau}}{1+n}$ は $n = 0$、$n = A$ で1であり、このとき A の大きさにかかわりなく大括弧は正の値である。しかし、$\frac{1+A^{1-\tau}n^{\tau}}{1+n}$ は $0 < n < A$ で極大値をとり、A が大きい場合、$(2-\frac{1+A^{1-\tau}n^{\tau}}{1+n})$ は負になる。さらに A が十分大きい場合に、$0 < n < A$ の範囲で大括弧は負の値に転換する。この場合、式(27)全体の符号は正に転換する。

$V(n)$ は A が小さい場合、単調減少関数、 A が大きい場合には増加関数の部分を含むが、n が0に近いほど $V(n)$ は大きい。

Population Growth and Optimality: Reconsidered

Tsutomu Kidachi

Abstract

The purpose of this paper is to reexamine the optimum growth rate for population, using durable capital production function.

In the Diamond-type overlapping generations model, the higher the population growth the larger fraction of economic output is required to maintain the capital labor ratio. This "capital-dilution effect" may be offset by an "intergenerational transfer effect" from the younger generation to the older generation.

Michel and Pestieau(1993) have given the conditions under which there is interior optimal rate for population, using total depreciation type production function.

In the case of durable capital production function, the range of an intergenerational effect is different from Michel and Pestieau's. When the population growth is near zero, because an intergenerational transfer effect is not so weak and a capital dilution effects is equally strong, the total effects result in the highest utility. This paper newly finds there is no interior optimal rate for population growth.