

Markowitz理論による投資対象の絞り込み

田中 寛[※]

1. はじめに

経済学などの文系と言われる学問分野でのコンピュータ利用の拡大の可能性がいわれて久しいが、少なくとも日本ではその活性化に火がついたと言える状態ではない。また、日本の金融業界でのコンピュータ利用投資の横並びで後ろ向き志向の姿勢もつとに指摘されている。そのような状況になる原因としていろいろの要因を挙げることができるが、最も根源的なものとして、日本の大学のいわゆる文系学部でのコンピュータ教育のあり方の不十分さを指摘できるのではないか。

株式投資というものは、一般の世間的常識では博打と変わらないものと認識されている分野である。金融業界では、株式取引を担う証券会社は銀行よりもかなり低位に位置付けられている。しかし、株式を中心とする証券市場の取引額は、世界的な金余り現象によって、先物を含む実物市場の何倍にも達するに至っている。資本主義が市場経済といわれる所以は、証券取引市場すなわち株式市場がその実体であることは異論がないであろう。

株式投資のポートフォリオの投資対象の組み合わせとその割合は、長年の投資家のカンに従ってなされて決められていて、ポートフォリオが市場のデータのみに基づいて決められていないと考えられている。少なくとも、学問的な裏打ちのある理論に従って実際のデータのみに基づいてポートフォリオが決められ、仮想的にでもあれその投資結果のシミュレーションがなされたことはない。ただし、証券会社やいわゆる基幹投資のファンドにおいて、投資信託などのポートフォリオがどのように決められているかは、企

業秘密でありその外部に明らかにされることはないことも事実である。もしかしたならば、先に述べたことが実際に行なわれているのかもしれない。

Markowitz投資理論¹⁾は、株式投資に限らない投資一般のリスク管理であるポートフォリオを、統計学的な見地で扱うものである。この理論は、今から50年以上前に作られたが、コンピュータの発達によって近年になって実社会で応用可能になったものである。大学で使用されている代表的な経済学の教科書にも書かれているが、その存在意義を認識している人は少ない。使いこなしている人はもっと少ないものと推測される。ちなみに、Markowitzは、その理論を構築した功績により、40年近くも経って1990年のノーベル経済学賞を受賞した。

資本市場についての教科書的なMarkowitzらの文献²⁾においても、出発点として与えられているのは10個の投資対象の平均収益率と共分散行列であり、それらのデータがどこから導き出されたのかは明示されていない。本来ならば用いたデータのすべてが学術的文献において開示されるべきであるが、そもそもの元データが膨大であることが予想されるために、活字のデータとして明示することが困難であるものと考えられる。このことは、3000以上の投資対象のある日本の株式市場を扱う我々の場合にはもっと更に困難であることは論を待たない。

著者は、Markowitz投資理論の根幹であるいわゆるフロンティア曲線を提示するとともに、本論文で詳しく述べる絞り込むための手法を適用した予備的な計算結果を示した³⁾。その際に用いたデータは、東京証券取引所一部に上場された電気機器部門の29社の一ヶ月間のものであった。

※青森公立大学

この論文は、市場の具体的なデータを用いて Markowitz 投資理論を実証的に検証したものである。

本論文は、ポートフォリオを得る際にどうしても必要となる、投資対象を絞り込む手法を Markowitz 理論に基づいて述べる。そのために、まず、別の形で定式化された Markowitz 理論の概略を2でまず述べる。3では、それを株式投資に適応するにあたってその投資対象を絞り込む方法について述べる。さらに、4では、3で述べた方法を実際の株式市場のデータで、日本の全株式市場の投資対象に仮想的に投資したときのシミュレーション結果について述べる。

2. Markowitz 投資理論

株価変動は、 n 個の株式銘柄の連続する m 日間の取引日の終値だけを扱うことを考察の対象とする。株式銘柄 i の投資開始時の株価 s_i を基準とするときの、開始日から数えて j 日目の終値 u_{ij} での収益率を t_{ij} とする。すなわち

$$\frac{u_{ij}}{s_i} = 1 + t_{ij} \quad (1)$$

という関係がある。また、 t_{ij} の m 日間の平均を x_i すると

$$x_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m t_{ij} \quad (2)$$

である。このとき、 $n \times n$ で表現される共分散行列⁴⁾ Σ の i 行 j 列成分は、

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (t_{ik} - s_i)(t_{jk} - s_j) \quad (3)$$

で定義される。

Cochran⁵⁾ は、Markowitz とは異なる形で共分散行列が与えられたときの投資理論を定式化した。その投資理論とは、株式銘柄 i に投資する金額の全投資金額に占める比率を w_i とし、 w_i から構成される列ベクトルを \mathbf{w} と表現するときに、

$$\mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} \quad (4)$$

という量の \mathbf{w} に関する停留問題を、二つの条件

$$\begin{aligned} \mathbf{1}' \mathbf{w} &= 1 \\ \mathbf{x}' \mathbf{w} &= y \end{aligned} \quad (5)$$

の下で解くことである。ここで、記号「 $'$ 」は列ベクトルを転置し行ベクトルにする操作を示す。ベクトル「 $\mathbf{1}$ 」はすべての成分が1である列ベクトルを表す。また、列ベクトル「 \mathbf{x} 」はその i 成分が x_i である。さらに、 y はその式の意味から期待収益率と呼ばれる。

上記の停留問題を解析的に解いた結果は、任意の期待収益率 y に対して、まず、投資比率ベクトル \mathbf{w} は

$$\mathbf{w} = \frac{\Sigma^{-1} \{ \mathbf{x}(\gamma y - \beta) + \mathbf{1}(\alpha - \beta y) \}}{\alpha \gamma - \beta^2} \quad (6)$$

で与えられる。また、停留値は、 y の二次関数として

$$\frac{\gamma y^2 - 2\beta y + \alpha}{\alpha \gamma - \beta^2} \quad (7)$$

となる。この停留値の式は、期待収益率 y に対するポートフォリオのリスク分散を表すいわゆるフロンティア曲線といわれるものである。ここで、 α 、 β 及び γ は、それぞれ

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x} \\ \beta &= \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{1} \\ \gamma &= \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (8)$$

である。フロンティア曲線の意味は、任意の期待収益率 y を得るためのリスクが、 y が大きくても小さくても大きくなり、適当な y でリスクが極値となることが期待されることを示している。リスクが極値になる y は

$$\frac{\beta}{\gamma} \quad (9)$$

であり、そのときのリスクを示す停留値は、

$$\frac{1}{\gamma} \quad (10)$$

である。そのときの投資比率ベクトル \mathbf{w} は

$$\frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{x}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \quad (11)$$

である。

停留問題の解析的解では、いずれの量もすべて共分散行列 Σ の逆行列が含まれる表現になっている。その他に含まれるのは、ベクトル成分がすべて1のベクトル $\mathbf{1}$ と、各投資対象の平均収益を成分とするベクトル \mathbf{x} であり、これらはいずれも既知の量である。(5)式の後の条件により期待収益率という意味を持つ y は、任意に設定できる量である。したがって、共分散行列の逆行列さえ具体的なデータから計算することができれば、停留問題の解を数値計算によって完全に求めることができることになる。数値計算上の常識では、逆行列は元の行列の各要素を係数とする連立一次方程式を解いて求める⁹⁾。すなわち、 $\mathbf{1}$ を単位行列として

$$\Sigma \mathbf{a} = \mathbf{1}$$

を \mathbf{a} について解いて

$$\mathbf{a} = \Sigma^{-1} \quad (12)$$

を得る。

3. 投資対象の絞り込み方

2で得られたのは、期待収益率 y に対するフロンティア曲線の式(7)とその線上の各点での投資対象のポートフォリオの式(6)である。しかしながら、具体的なデータに基づいた数値計算の結果得られるポートフォリオの各投資対象に対する投資割合 \mathbf{w} のベクトル成分がすべて正となることは、(6)式から一般的数学的に証明することは出来ない。従って、投資割合が負となる要素がある投資対象が計算結果に存在することは避け難い。負となる投資割合をもつ投資対象は、投資対象として推奨できないという意味で投資対象の格付けに利用できるかもしれないが、そ

れに対する現実の投資行動を実行することは不可能であるのは自明である。また、負となる投資対象に対して空売りの手法を用いればよいとの議論は可能であるが、その場合は、投資対象の絞り込むことが出来ないので、全投資対象とするポートフォリオしか得ることが出来ない。いずれにしろこのままでは、現実には投資が可能であるポートフォリオを得ることが出来ない。

何の手がかりもなしに投資対象の銘柄を絞り込むことによって現実には投資可能なポートフォリオを得ようとしても、雲をつかむ事に等しい。そこで、投資対象全銘柄についてリスク分散が最小であるときに得られる(11)式で与えられるポートフォリオを手掛かりとして考察を始める。このポートフォリオは、全銘柄を対象とした代表的なフロンティア曲線上の点である。このポートフォリオにおいて正の大きい比率になっている投資対象を組み合わせることによって、最終的にすべて正のポートフォリオを得ることができると期待される。そこで、全銘柄の投資比率についてソートし、大きいものから200銘柄に絞り込む。全投資対象銘柄は3000以上もあるので、これらの投資比率はすべて正であると考えられる。このことが実現していない事態は余程特殊な場合である。

投資対象が絞り込まれたので共分散行列(3)が変化する。ただし、行列構成要素の値が変わる訳ではなく、投資対象から外した行列要素がなくなるだけである。連立一次方程式を解いて、逆行列が(12)式によって求まる。そして、(8)式で α 、 β 、 γ が得られる。期待収益率 y が定めれば、(6)式によってポートフォリオ \mathbf{w} が決まる。 y は任意の値を取ることができるので、残っている投資対象すべての \mathbf{w} の要素が正になる y を探すのも一つの方法である。しかし、一つでも負の \mathbf{w} の要素があるときに、どの y の場合を選択するかに対応が困難である。そこで、ある y に固定して、その y での負の \mathbf{w} の要素を外した共分散行列から出発するというここで述べた手順を何度も繰り返すことによって、その y での \mathbf{w} のすべての要素が正となるまで投資対象を絞り込むことが出来るようになる。

4. 投資のシミュレーション

数値計算を行ったPCのハードウェアは、CPUがAMD製Athlon64の4000+であり、メモリーは4ギガバイト積載しているが用いたOSは3ギガバイトしか認識してくれない。ソフトウェアは、OSがFedoraCore5であり、C言語コンパイラのバージョンがgcc4.1.1である。連立一次方程式を解いて求める逆行列の計算に必須である多倍長精度の関数群ライブラリであるgmpがコンパイラに標準として含まれている。後述する方法で入手したデータを①加工し、②共分散行列を作成し、その③逆行列を求め、④投資対象を絞り込む処理を行なうために必要となる4個のそれぞれのプログラムは、C言語で個別にすべて自作した。

投資対象の株価データは、インターネットの「株価情報」サイト⁷⁾から入手した。このサイトでは、東京証券取引所の一部、二部、マザーズ、およびジャスダック、大阪証券取引所の一部、二部、ヘラクレスでの4000以上の各取引銘柄について、毎日の始値、高値、安値、終値のデータがCSVファイル形式で入手できる。CSV形式のデータは、C言語プログラムではカンマで区切られているテキストタイプのデータとして扱うことができ、非常に便利である。また、CSV形式でデータを記憶されたファイルは、表計算ソフトウェアでそのまま通常の表として読み込むことも出来る。1で述べたように、これらのデータは膨大なものである。活字になっているデータとしては、ほとんどの新聞に毎日掲載されているが、それらを今必要とするデータの形に加工することは不可能である。

2006年1月の取引日初日である4日の始値を各取引銘柄の基準として、2で述べた方法により各取引日の終値についての共分散行列を計算する。その際に、一日でも取引の無かった銘柄は、処理対象銘柄から除外する。その結果、19日間の取引で残った銘柄は、3489銘柄となる。これらの銘柄について、連立一次方程式を解いて共分散行列の逆行列を求めるのに、約352分かかる。そして、3で述べた方法で200銘柄に絞る込む。

表1：ポートフォリオ1

投資銘柄	投資比率
カルピス	0.174
ジョルダン	0.016
武田薬品	0.059
日本ロジスティクス投資法人	0.452
タイトー	0.022
ショクブン	0.276
期待収益率	0.02020
分散リスク	0.00005

表2：ポートフォリオ2

投資銘柄	投資比率
東証・食料	0.541
ノエビア	0.346
浜松ホトニクス	0.053
アトム	0.061
期待収益率	0.00720
分散リスク	0.00009

2006年2月1日に株式投資を開始するために、前節で述べた1月の統計的な処理結果を用いる。まず、適当な三つの期待収益率を決め、先述した200銘柄から3で述べた方法ですべて正の投資比率になる対応する三つのポートフォリオを求める。その計算結果の投資銘柄と投資比率及び期待収益率と分散リスクを表1及び表2、表3に示す。そして、その比率で2月1日の始値で投資をはじめるとする。各月の最終日の終値での投資結果を表4に示す。ただし、各月のデータで先述したような理由で除外された銘柄がある場合、その銘柄に対する投資が失敗したものとしてゼロとして投資結果を計算する。

三つの異なる期待収益率から得られる投資結果は、同じデータに基づく統計的な処理によって得られるポートフォリオであるにもかかわらず異なる。表1のポートフォリオに含まれるタイトーは3月末で上場廃止になってしまった銘柄であり、ショクブンは取引量が少ないため他の月の投資が失敗したものとして上述のように評価された銘柄である。そのため、4月以降において投資結果が8割前後に落ち込んだのである。表2のポートフォリオの銘柄は、すべての月で投資失

敗がない。そのため、かなり安定した投資結果が得られている。さらに、期待収益率が表1と表2の間である表3のポートフォリオでは、表2のものより投資結果のぶれが大きいことが分かる。これらが、Markowitz投資理論の現実データによるシミュレーションの結果である。

表3：ポートフォリオ3

投資銘柄	投資比率
東証・石油	0.202
NIPPOコーポレーション	0.010
近畿コカ・コーラボトリングズ	0.078
カルピス	0.065
ニチレイ	0.027
ノエビア	0.033
日本ロジスティック投資法人	0.584
期待収益率	0.01448
分散リスク	0.00006

表4：2006年2月1日始値で始めた投資の各月末終値での投資結果

月末	ポートフォリオ1	ポートフォリオ2	ポートフォリオ3
期待収益率	0.02020	0.00720	0.01448
2月	1.018	1.008	1.006
3月	1.021	1.025	1.030
4月	0.781	1.048	1.069
5月	0.767	1.022	1.031
6月	0.744	1.035	0.947
7月	0.738	1.014	0.947
8月	0.726	1.026	0.937
9月	0.729	1.006	0.939
10月	0.727	1.007	0.939
11月	0.773	1.003	0.983
12月	0.869	1.081	1.093

表4で示される投資結果に基づいてポートフォリオを詳細に考察する。

表1、表2、表3に示すようにポートフォリオを構成する投資対象とその投資比率は少しずつ異なっている。期待収益率の大きさは、表2が一番小さく、表3、表1の順に大きくなる。表2と表3には、ノエビアがともに入っている。表3と表1には、カルピスと日本ロジスティック投資法人がともに入っている。そして、最も期待収益率の高い表1のポートフォリオに、

投資結果を悪くすることになるタイトーとショックンが入っている。期待収益率が大きいほど表4に示される投資結果のぶれが大きくなることが分かる。このことは、期待収益率が平均以上でしかも大きくなればなるほど、リスクが大きくなるという統計学から期待される傾向と一致している。ちなみに、3489銘柄の投資対象での計算における(9)式の値は、 -0.07777 である。この値を市場における平均的な収益率であると考え、この値に比べると表で扱う期待収益率はかなり大きいものであるといえる。

表1、表2、表3には分散リスクも示す。分散リスクは10の -5 乗のオーダーであり、いずれもかなり小さい値である。期待収益率が大きくなると、表に示す分散リスクの値が小さくなっている。このことは、前節で述べた統計学から期待される傾向と矛盾しているように一見すると見える。しかし、表に示す期待収益率は、異なる投資対象の組み合わせのポートフォリオのものであることに注意すべきである。同じ投資対象で構成されるポートフォリオに対して期待収益率を変化させれば、統計学から期待される結果と矛盾しないものが得られることは、Markowitz理論が保証している。

以上の数値計算における最も重要なポイントは、逆行列の計算である。この計算を実施する上での一つの問題は、その行列の大きさである。4000×4000近い要素数の行列を扱うためには大量のPCメモリを必要とする。実行中のプログラムが消費するメモリをUnixのtopコマンドで測定したところ1700メガバイト近くもあった。今の場合、3ギガバイトのメモリがあったのでスワップは起こらなかったが、1ギガバイトしかメモリのない2.8GHzのIntel社製のXeonというCPUをもつ同じOSを搭載したPCでは、3倍以上の1100分以上が逆行列の計算にかかった。逆行列計算のもう一つの問題は、計算精度を確保することである。C言語の通常の数値計算で最も高精度である倍精度の計算では、今の場合、計算精度は一桁もないことになっている。そこで、gccに標準として含まれているgmpという多倍長データを処理することの出来るライブラリを用い、50

桁の精度が確保できるように一つの数値データを200ビット以上の精度で計算した。そして、連立一次方程式の係数をLDU分解した⁹際に分解した行列を逆に掛け合わせて元の行列になることを確かめることによって、逆行列が求まった際にその逆行列と元の行列を掛け合わせた結果が単位行列になることを確かめることによって、計算精度が悪くなっていないことを確かめた。逆行列計算の計算時間の約三分の二は、この計算精度を確かめるために消費されている。

5. 結論

日本の株式市場における平均的な収益率が -0.07777 という投資環境としてよくない2006年1月という月のデータ分析をMarkowitz理論に従って行なった。まず、その分析結果に基づいて一つの期待収益率に対する投資対象を絞り込むことが、Markowitz理論を応用して得る方法によって出来ることを述べた。そして、その方法で投資対象を絞り込むことによって約一年後に利益を確実に出すポートフォリオ(表2)を得ることが出来た。また、期待収益率を大きくとりすぎると、絞り込まれた投資対象のなかにリスクの高いものが含まれることになり、その後の収益率が悪化するポートフォリオ(表1)もあることを示した。

しかし、投資対象を絞り込む以前に決めるべき期待収益率として平均的な収益率よりどの程度大きいものが適当であるかは定かではない。このことをはっきりさせることは、今後の研究課題としたい。

(2007年12月7日受付、2008年1月17日受理)

参考文献

- 1) H. M. Markowitz, "Portfolio Selection", Journal of Finance 7 77(1952).
- 2) H. M. Markowitz and G. P. Todd, "Mean - Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets", Frank J. Fabozzi Associates, 335-336(2000).
- 3) 田中寛, "Markowitz型投資理論の数値解法", 青森公立大学経営経済学研究 2 no2, 2-8(2002).
- 4) R.A. ジョンソン & D.W. ウィッチマン, "多変量解析の徹底研究" (西田俊夫訳), 現代数学社, 9-15(1992).
- 5) J.H. Cochran, "Asset Pricing", Princeton University Press, 84(2001).
- 6) 戸川隼人, "マトリックスの数値計算", オーム社, 61-64(1985).
- 7) <http://www.edatalab.net/kabu/>

The Narrowing of Investment Outlet by the Method Applying Markowitz Theory

Hiroshi Tanaka

Abstract

Data of stock prices of about 4000 companies of the stock market in Japan on January, 2006 was analyzed by the Markowitz theory. The method of obtaining the portfolio that narrowed the investment outlet based on the result and consisted of several companies was newly found. The parameter that can be freely moved when narrowing it is only an expected rate of return of the analyzed data according to the method. The investment result of obtaining by the investment's of the opening price of the first business days beginning for the portfolio of the investment outlet, that is, three combinations in February, 2006, and calculating by the closing share price of the final business days at each month was requested. As a result, being able to obtain the portfolio that obtained earnings with stability in a bad as a whole investment environment even became clear. Moreover, the results of swinging of the investment result growing, and causing the loss was obtained in the portfolio requested by an expected rate of return that were larger than the expected rate of return from which the stable portfolio was requested.